# Problemas Elípticos Não-Locais do Tipo p-Kirchhoff

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Rúbia Gonçalves Nascimento e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 25 de Janeiro de 2008

*Prof. Dr. Francisco Julio S. A. Corrêa*
Orientador

*Prof. Dr. Djairo G. de Figueiredo*
Co-orientador

Banca Examinadora

1 - Francisco Julio Sobreira de Araújo Corrêa (orientador)

2 - Aloísio José Freiria Neves

3 - José Valdo Abreu Gonçalves

4 - Olímpio Hiroshi Miyagaki

5 - Orlando Francisco Lopes

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP como requisito parcial do título de Doutor em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
**Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues**

Nascimento, Rúbia Gonçalves

N17p Problemas elípticos não-locais do tipo p-Kirchhoff / Rúbia Gonçalves Nascimento -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientadores : Francisco Julio Sobreira de Araújo Corrêa; Djairo Guedes de Figueiredo

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais parciais não-lineares. 2. Equações diferenciais elípticas. 3. Dirichlet, Problemas de. I. Corrêa, Francisco Julio Sobreira de Araújo. II. Figueiredo, Djairo Guedes de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Nonlocal elliptic problems p-Kirchhoff type.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Nonlinear differential partial equations. 2. Elliptical differential equations. 3. Dirichlet problems.

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutora em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Francisco Julio Sobreira de Araujo Corrêa (UFCG)
Prof. Dr. Aloísio José Freiria Neves (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves (UNB)
Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki (UFV)
Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 25-01-2008

Programa de pós-graduação: Doutorado em Matemática

**Tese de Doutorado defendida em 25 de janeiro de 2008 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). FRANCISCO JÚLIO SOBREIRA DE ARAÚJO CORRÊA**

**Prof(a). Dr(a). OLÍMPIO HIROSHI MIYAGAKI**

**Prof(a). Dr(a). JOSÉ VALDO ABREU GONÇALVES**

**Prof(a). Dr(a). ORLANDO FRANCISCO LOPES**

**Prof(a). Dr(a). ALOÍSIO JOSÉ FREIRIA NEVES**

# Dedicatória

**Ao Giovany, meu marido e grande amor**
**e ao meu filho Gian Victor.**

# Agradecimentos


-Agradeço a Deus, por sempre ter-me dado forças.

-À minha mãe Vitorina, pelo exemplo de mãe que é e por tudo que me ensinou, ao meu pai Rubens (in memorian) pelo carinho e saudades que deixou.

-Às minha irmãs Ana Cláudia e Rubenilce (Paula) por estarem sempre ajudando quando preciso.

-Ao Professor Francisco Julio, pela orientação, compreensão e disponibilidade para me orientar neste trabalho.

-Ao professor Djairo por ser meu co-orientador e aos professores Aloísio, José Evaldo, Olímpio e Orlando Lopes por aceitarem a compor a banca julgadora e pelas sugestões dadas.

-Aos professores Ducival e Mauro do departamento de Matemática da Ufpa pelos ensinamentos que me passaram e pela orientação no mestrado.

- Aos professores do Departamento de Matemática da UFCG pela hospitalidade quando de minha estadia lá.

-Ao Professor Claudianor pela disponibilidade e paciência em me ouvir nos seminários, pelo incentivo e sugestões dadas em meus estudos e pelo profissional que é.

- Aos meus colegas do predinho, pela boa convivência, em especial a minha amiga Valdiane por todos os dias difíceis que passamos em Campinas e por todo o apoio que me deu.

- À Tânia, Cidinha e Edinaldo pelo profissionalismo e competência.

- Ao professor Carlos Edilson de Almeida Maneschy, Diretor de Pesquisa da Propesp-Ufpa, pelo apoio incondicional em todos os momentos que precisei.

-Ao meu esposo Giovany, por todo carinho, atenção e força que sempre me deu nos momentos mais difíceis, por ser um grande exemplo de homem, de marido e de caráter, por ser o meu grande amigo e companheiro e principalmente, por ser o meu grande amor.

-Ao meu filho Gian Victor pelos sorrisos, abraços e carinhos que me dá.

# Resumo

Neste trabalho usaremos algumas técnicas da Análise Funcional não-linear para estudar a existência de soluções para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -[M(\|u\|_{1,p}^{p})]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ são funções satisfazendo certas condições a serem apresentadas ao longo deste trabalho e $\Delta_p$ é o operador p-Laplaciano.

Palavras Chaves: Equações Diferenciais Elípticas, p-Kirchhoff, Problemas Não-Locais, p-Laplaceano, Método de Galerkin, Método Variacional, Sub e Supersolução, Localmente Lipischitz.

# Abstract

In this work we will use some techniques of the Analysis Functional no linear to study the existence of solutions for the following class of problems

$$\begin{cases} -[M(\|u\|_{1,p}^{p})]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) \text{ in } \Omega, \\ u = 0 \text{ in } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is boundary domain, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ are functions satisfying some growth to apper in the work and $\Delta_p$ is the p-Laplacian operator.

# Conteúdo

# Introdução

Neste trabalho vamos considerar a seguinte classe de problemas elípticos

$$\begin{cases} -[M(\|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ são funções dadas e $\Delta_p$ é o operador p-Laplaciano, $p > 1$,

$$\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

em que $\| \cdot \|_{1,p}$ é a norma usual no espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ dada por

$$\|u\|_{1,p} = \left( \int_\Omega |\nabla u|^p \right)^{1/p}.$$

Esse problema, denominado de p-Kirchhoff, é uma generalização da equação clássica de Kirchhoff

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

onde $\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2$ é a norma usual em $H_0^1(\Omega)$.

Como é bem conhecido, (4) é a versão estacionária da equação hiperbólica de Kirchhoff

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{5}$$

a qual apareceu pela primeira vez no trabalho de Kirchhoff [38], em 1883. Esta equação estende a clássica equação da onda de D'Alembert, considerando os efeitos da mudança no comprimento da corda durante as vibrações.

Os parâmetros na equação (5) têm os seguintes significados: $L$ é o comprimento da corda, $h$ é a área de sua seção transversal, $E$ é o módulo de Young do material do qual ela é feita, $\rho$ é a densidade da massa e $P_0$ é a tensão inicial. Vale ressaltar que a equação (5) começou a receber maior atenção após a publicação do trabalho de J.Lions [43], no qual foi proposta uma abordagem de Análise Funcional para tal problema.

O interesse matemático em problemas não-locais do tipo (3) (não-local devido a presença do termo $M(\|u\|_{1,p}^p)$, implicando que as equações em (3) e (4) não são igualdades pontuais) vem aumentando devido apresentarem uma variedade relevante de situações físicas e das engenharias, requerendo aparatos não-triviais para resolvê-los. Eles têm sido estudado por diversos autores entre os quais podemos citar [3], [19], [20], [44], [45] e suas referências onde diferentes técnicas foram usadas. Do ponto de vista variacional, essa classe de problemas foi estudado em [5], [23] e [24].

Particularmente, o problema (3) apresenta algumas combinações que, ao menos para o nosso conhecimento, parecem ser novas. De fato, no problema (3) aparece o termo não-local $M(\|u\|_{1,p}^{p})$ motivado, entre outras coisas, por situações físicas. Além disso, temos a presença do operador p-Laplaciano que aparece em várias áreas da Ciência como Astronomia, Glaciologia, Climatologia, Fluidos Não-Newtonianos, Extração de Petróleo etc. Por exemplo, no estudo de sensitividade de um modelo estacionário não-linear que aparece em Climatologia com relação a variação da constante solar (ver [10]), em problemas de reação-difusão, como também em fluxos em meios porosos. Além dessas considerações, no capítulo 2 temos também a presença de um termo singular que coloca uma dificuldade adicional em nosso estudo. Problemas elípticos singulares surgem em Catalizadores de Substâncias Químicas Heterogêneas, Fluidos Não-Newtonianos, Condução Não-Linear do Calor entre outros fenômenos.

O objetivo central deste trabalho é mostrar existência de soluções do problema (3) para algumas classes funções de $M$ e $f$. Para isso, usaremos diversas técnicas da Análise Funcional Não-Linear e no que segue, enunciaremos os resultados principais obtidos.

No Capítulo 1, denominado Sobre uma Equação Elíptica do Tipo p-Kirchhoff, estudaremos os seguintes problemas

$$\begin{cases} -[M(||u||_{1,p}^{p})]^{p-1}\Delta_p u = f \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

com $p > 1$, $f \in W^{-1,q}(\Omega)$, $q$ é o expoente conjugado de $p$, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $W^{-1,q}(\Omega)$ é o dual topológico de $W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{cases} -[M(||u||_{1,p}^{p})]^{p-1}\Delta_p u = u^{\alpha} \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

em que $\alpha$ satisfaz $0 < \alpha < p-1$ com $p > 1$ e

$$\begin{cases} -[M(x, \|u\|_{1,p}^{p})]^{p-1}\Delta_p u = f(x) \text{ em } \Omega, \\ \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

em que $M : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função dada e $f \in L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Será importante neste capítulo recordar que os problemas

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{9}$$

e

$$
\begin{cases} -\Delta_p u = u^\alpha \text{ em } \Omega, \\ \quad u > 0 \text{ em } \Omega, \\ \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{10}
$$

$1 < p < \infty$, $0 < \alpha < p-1$, possuem unicidade de solução fraca, conforme pode ser visto em [47] e [30], respectivamente.

Os principais resultados são:

***Teorema 1.1*** *Para cada $0 \neq f \in W^{-1,q}(\Omega)$ o problema (6) e a equação*

$$
M(t)t^{1/p} = \|w\|_{1,p}, \ t > 0,
$$

*possuem as mesmas quantidade de soluções, onde $w$ é a única solução do problema (9).*

***Teorema 1.2*** *Suponhamos que $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua satisfazendo $M(t) > 0$ para todo $t \geq 0$. Então o problema (7) possui o mesmo número de soluções da equação*

$$
[M(t)]^{p-1} t^{(p-1-\alpha)/p} = ||v||_{1,p}^{p-1-\alpha}, \quad t > 0, \tag{11}
$$

*onde $v$ é a solução de (10).*

Para o próximo resultado, consideraremos as seguintes hipóteses sobre $M$:

$(m_1)$ $M(x, \lambda) \geq m_0 > 0$, para todo $(x, \lambda) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+$.

$(m_2)$ Para cada intervalo $I$, existe uma constante positiva $C_I$ tal que

$$
|[M(x, \lambda_1)]^{p-1} - [M(x, \lambda_2)]^{p-1}| \leq C_I |\lambda_1 - \lambda_2|, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in I.
$$

***Teorema 1.3*** *Seja $M \in C(\Omega \times \mathbb{R}^+)$, satisfazendo $(m_1) - (m_2)$. Para cada $f \in L^q(\Omega)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, o problema (8) possui uma solução $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Na seção 2 de [5], Alves, Corrêa e Ma mostraram um resultado de existência para o problema (6) que aparece na seção 1.1 do nosso trabalho, onde em [5] os autores consideram o caso $p = 2$. O argumento usado em [5] é uma adaptação de algumas idéias abordadas em [19] e [20] onde os autores estudam uma outra classe de problemas não-locais. Usaremos argumentos semelhantes aos usados em [5] para demonstrar o Teorema 1.1 os quais também motivaram a demonstração do Teorema 1.2, que aparece na seção 1.2 e que fornece a existência de solução para o problema (7). Em ambas as seções, foi importante a p-homogeneidade do operador p-Laplaciano e a unicidade de solução dos problemas (9) e (10). Na seção 1.3, demonstraremos o Teorema 1.3. Visto que a função $M$ depende da variável $x \in \Omega$, não será possível utilizar as técnicas usadas nas seções anteriores. Nesta seção, usaremos o Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer, que será enunciado no corpo deste trabalho.

Os resultados centrais do Capítulo 1 completam o estudo feito na seção 2 de [5] nos seguintes aspectos:

1) Por ser um operador não-linear definido em um espaço de Banach, os problemas que envolvem o operador p-Laplaciano apresentam várias dificuldades tais como: unicidade, regularidade, degeneracidade, etc., o que o difere, entre outras coisas, do Laplaciano.

2) Os autores em [5] não consideraram o caso em que $f$ é sublinear e a situação em que $M$ também depende da variável $x \in \Omega$.

No Capítulo 2, denominado Problemas Não-Locais com Termo Singular, mostraremos, na seção 2.1, existência de solução do problema

$$\begin{cases} -[M(\|u\|_{1,p}^{p})]^{p-1}\Delta_p u = \dfrac{h(x)}{u^{\gamma-p+2}} + u^{\alpha-p+2} \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{12}$$

onde $2 \leq p < N$, $h$ é uma função definida em $\Omega$ e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua satisfazendo:

$(M_1)$ Existem $m_0 > 0$ e $\theta_1 > 0$ tais que $M(t) \geq m_0$ se $t \geq \theta_1$;

$(M_2)$ $\theta_2 = \sup\{t > 0; M(t) = 0\} > 0$.

e na seção 2.2 estudaremos a existência de solução do problema

$$\begin{cases} -[M(\|u\|_{1,p}^{p})]^{p-1}\Delta_p u = a(x)u^{-\gamma} + \lambda f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{13}$$

em que $N \geq 1$, $1 < p < N$, $a \geq 0$ é uma função mensurável não trivial, $\gamma > 0$ é uma constante, $\lambda > 0$ um parâmetro, $f$ é uma função de Carátheodory satisfazendo:

$(f)$ $\displaystyle\sup_{(x,t)\in\Omega\times[0,T)} |f(x,t)| < \infty$, para todo $T > 0$.

$M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que

$(M_0)$ Existe $m_0 > 0$ tal que $M(t) \geq m_0 > 0$, para todo $t \geq 0$.

Denotaremos por $C_0^1(\overline{\Omega})$ o espaço $\{u \in C^1(\overline{\Omega}); u(x) = 0, \text{ para todo } x \in \partial\Omega\}$ e admitiremos,

$(H)$ Existem $\varphi > 0$ em $C_0^1(\overline{\Omega})$ e $q > N$, tal que $a\varphi^{-\gamma} \in L^q(\Omega)$.

Os principais resultados deste capítulo são:

***Teorema 2.1*** *Sejam $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, uma função contínua, positiva em $\overline{\Omega}$, $\gamma, \alpha \in (p-2, p-1)$, $2 \leq p < N$ e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua satisfazendo $(M_1) - (M_2)$. Então o problema (12) possui uma solução positiva.*

***Teorema 2.2*** *Suponhamos que as condições $(f)$,$(M_0)$ e $(H)$ sejam satisfeitas e que $f \geq 0$. Então existe $\lambda_0 > 0$ tal que o problema (13) possui uma solução para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$.*

O problema (12) foi motivado pelo estudo feito em [22] do ano de 2007 em que o autor utiliza o método de Galerkin para mostrar a existência de solução para o problema (12) considerando o caso não-local com $p = 2$. Na seção 2.1 usaremos esse mesmo método, mas considerando o operador p-Kirchhoff. Na seção 2.2, inspiramo-nos em [49] de 2005 para mostrar a existência de solução do problema (13). Nesse trabalho, os autores combinaram a técnica de sub e supersolução com método variacional para resolver o problema (13) considerando o caso local.

O resultado obtido no Teorema 2.1 completa os estudos feitos em [22] nos seguintes aspectos:

1) No nosso caso consideraramos $2 \leq p < N$ e o operador é o p-Laplaciano.

2) O Método de Galerkin para o caso quasilinear apresenta algumas dificuldades como, por exemplo, a falta de estrutura hilbertiana. Em vista disso, temos de trabalhar com bases de Schauder as quais provocam o aparecimento de estimativas não-triviais que não ocorrem para o caso $p = 2$.

3) A convergência de uma seqüência gradiente não ocorre de maneira imediata, como pode ser visto no Apêndice $A_2$. Esta dificuldade surge da falta de estrutura hilbertiana

O estudo feito no Teorema 2.2 completa o que foi feito em [49] nos seguintes aspectos:

1) Estamos considerando o caso não-local e isso implica no aparecimento estimativas adicionais que não ocorrem no caso local.

2) Desconhecemos resultados sobre problemas não-locais com singularidade para $2 < p < N$.

No Capítulo 3, denominado Problemas Não-Locais com Condição de Fronteira de Neumann, estudaremos o problema

$$\begin{cases} -\left[M_1\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p\right)\right]^{p-1}\Delta_p u = f(u,v) + \rho_1(x) \;\; \text{em} \;\; \Omega, \\ -\left[M_2\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^p\right)\right]^{p-1}\Delta_p v = g(u,v) + \rho_2(x) \;\; \text{em} \;\; \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \;\; \text{em} \;\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{14}$$

onde $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $M_1, M_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas satisfazendo as seguintes hipóteses:

$(fg)$ Existe uma função $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $C^1$, tal que

$$f(u,v) = F_u(u,v) \;\; \text{e} \;\; g(u,v) = F_v(u,v), \;\; \text{para todo } (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

$(F_1)$ Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(s+k, t+k) = F(s,t), \text{ para todos } s, t \in \mathbb{R}.$$

(M) Existe $m_0 > 0$ tal que

$$M_1(t), M_2(t) \geq m_0, \text{ para todo } t \geq 0.$$

(C) As funções $\rho_1, \rho_2 \in L^q(\Omega)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e

$$\int_\Omega \rho_1 = \int_\Omega \rho_2 = 0.$$

O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

***Teorema 3.1*** *Suponhamos que sejam válidas as condições $(fg)$, $(F_1)$, $(M)$ e $(C)$. Então o problema (16) possui uma solução fraca $(u,v) \in X$.*

Este capítulo foi motivado por um estudo feito em [26], onde foi dado um princípio de minimização, cuja grande utilidade é a situação onde o funcional associado ao problema não é coercivo. Como aplicação, o autor mostrou a existência de solução para o problema

$$-\Delta u = f(u) + \rho \text{ em } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ em } \partial\Omega. \tag{15}$$

Neste capítulo completamos os estudos feitos em [26] nos seguintes aspectos:

1) Estamos estudando um problema não-local e portanto alguns argumentos não puderam ser repetidos como, por exemplo, a convergência da seqüência minimizante.

1) Pelo fato de estarmos trabalhando com o operador p-Laplaciano algumas estimativas foram necessárias e que não aparecem em [26].

Salientamos que desconhecemos resultados para problemas elípticos não-locais com condição de fronteira de Neumann. Portanto, o nosso resultado é novo mesmo para $p = 2$.

No Capítulo 4, intitulado Equações Elípticas do Tipo p-Kirchhoff Com Termo Não-Local Não-Crescente, estudaremos existência de solução do problema

$$\begin{cases} -[M(\|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{16}$$

onde $1 < p < N$, $f$ é uma função superlinear com crescimento subcrítico e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma dada função.

Admitiremos que $M$ satisfaz as seguintes condições:

$(H_1)$ Existem $m_1, t_1 > 0$ tais que

$$M(t) \geq m_1 \text{ se } 0 \leq t \leq t_1.$$

$(H_2)$ Existem $m_2, t_2 > 0$ tais que

$$0 < M(t) \leq m_2 \text{ se } t \geq t_2.$$

$(H_3)$ $\lim\limits_{t\to\infty} [M(t^p)]^{p-1} t^{p-1} = +\infty.$

$(H_4)$ $M$ é não crescente e $M(t) > 0$, para todo $t \geq 0$.

Suporemos que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e satisfaz:

$(f_1)$ $f(x,t) = 0$, para todo $t \leq 0$ e para todo $x \in \Omega$.

$(f_2)$ $\lim\limits_{|t|\to+\infty} \dfrac{f(x,t)}{|t|^{p-1}} = 0$, uniformemente em $x \in \Omega$.

$(f_3)$ $\lim\limits_{|t|\to+\infty} \dfrac{f(x,t)}{|t|^{q-1}} = 0$, onde $p<q<p^*$, $\left(p^* = \dfrac{pN}{N-p}\right)$ uniformemente em $x \in \Omega$.

$(f_4)$ Existem $p < \mu < q$ tal que $0 < \mu F(x,t) \leq t f(x,t)$, para todo $t > 0$.

Além disso, estudaremos questões de existência e multiplicidade de solução do problema

$$\begin{cases} -[M(\|u\|_{1,p}^p)]^{p-1} \Delta_p u = \lambda u^r + f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{17}$$

onde $0 < r < p-1$, $2 < p < N$, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas satisfazendo as hipóteses $(H_1), (H_2)$,$(H_4)$ e $(f_1) - (f_4)$ da seção anterior. Substituiremos a hipótese $(H_3)$ pela seguinte condição

$(H_3')$ $\lim\limits_{t\to\infty} [M(t^p)]^{p-1} t^{(p-1)-r} = +\infty$

Observe que para $r = 0$ as condições $(H_3)$ e $(H_3')$ coincidem.

Os principais resultados deste capítulo são:

***Teorema 4.2*** *Suponhamos que a função $M$ satisfaça $(H_1) - (H_4)$ e $f$ satisfaça $(f_1) - (f_4)$. Então o problema (4.1) possui uma solução não-trivial e não-negativa.*

***Teorema 4.3*** *Suponhamos que $f$ e $M$ satisfaçam as condições e $(f_1) - (f_4)$ e $(H_1)$, $(H_2)$, $(H_3')$ e $(H_4)$. Então existe $\lambda^* > 0$ tal que para $\lambda \in (0, \lambda^*)$, o problema (4.6) possui pelo menos duas soluções $u_1$ e $u_2$, satisfazendo*

$$I(u_1) < 0 < I(u_2).$$

Em 2001, Alves, Corrêa e Ma [5] mostraram um resultado de existência de solução para o problema (16) com $p = 2$ e considerando $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com crescimento superlinear e subcrítico usando o Teorema do Passo da Montanha juntamente com estimativas do tipo Gidas-Spruck. Nesse mesmo artigo os autores estudaram o problema (17) utilizando os mesmo argumentos usados anteriormente. Em 2006 Corrêa e Figueiredo [23] estudaram o problema (16) considerando $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com crescimento crítico ou supercrítico e novamente a ferramenta principal foi o Teorema do Passo da Montanha. No mesmo ano os autores mostraram existência de solução para o caso $p$ mais geral cujo resultado aparece em [24].

Em todos os artigos citados acima as hipóteses sobre a função $M$ são diferentes das usadas nesta seção para os problemas (16) e (17).

Os resultados centrais do capítulo 4 completam os estudos feito nos artigos [5], [23] e [24] nos seguintes aspectos:

1) M não é limitada inferiormente por uma constante positiva, mas eventualmente pode tender a zero.

2) Estamos considerando uma outra classe de funções $M$, que não foi considerada pelos autores citados acima.

No Capítulo 5, intitulado Equações Elípticas do Tipo p-Kirchhoff Com Não-Linearidade Descontínua, estudaremos questões sobre existência e multiplicidade de soluções não-negativas para o problema

$$\begin{cases} -[M(\|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u = H(u-a)u^q + \lambda h(x)u^s \ \text{ em } \ \Omega, \\ \\ u = 0 \ \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{18}$$

em que $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo as condições: $(H_1)$, $(H_2)$, $(\widetilde{H}_3)$ e $(H_4)$, onde

$(\widetilde{H}_3)$ $\lim\limits_{t\to\infty}[M(t^p)]^{p-1}t^{(p-1)-q} = +\infty$,

com $1 < q+1 < p < s+1$, $a > 0$ e $\lambda > 0$ parâmetros reais, $h : \Omega \to (0,\infty)$ uma função positiva mensurável, $h \in L^\infty(\Omega)$ e $H$ é a função de Heaviside, isto é,

$$H(t) = \begin{cases} 0 \ \text{ se } \ t \leq 0, \\ \\ 1 \ \text{ se } \ t > 0. \end{cases}$$

O principal resultado desse capítulo é o seguinte:

***Teorema 5.2*** *Suponhamos que $M$ satisfaça as condições $(H_1), (H_2), (\widetilde{H}_3), (H_4)$ e $h \in L^\infty(\Omega)$. Então existem $\lambda^* > 0$ e $a^* > 0$ tais que para $\lambda \in (0, \lambda^*)$ e $a \in (0, a^*)$ o problema (5.1) possui duas soluções não-negativas, $u_1$ e $u_2$, satisfazendo:*

*i)* $|\Gamma_a(u_i)| = 0, \quad i = 1, 2,$

*ii)* $I_{\lambda,a}(u_2) < 0 < I_{\lambda,a}(u_1),$

*iii)* $|\{x \in \Omega; u_i(x) > a\}| > 0, \quad i = 1, 2.$

A importância em estudar esses tipos problemas, segue do fato que muitos problemas de fronteira livre, que surgem na física matemática, podem ser reduzidos a problemas de fronteira com não-linearidade descontínua. Além disso, tais classes de problemas apresentam uma variedade de situações físicas relevantes. Alguns problemas representam modelos de soluções estacionárias para fenômenos químicos e biológicos e é bem conhecido que vários problemas relacionados a Física de Plasma dão origem a equações com não-linearidade descontínua. Tais tipos de problemas foram vastamente abordados em diversos artigos, entre os quais podemos citar [1], [2], [6], [8], [9], [11], [12], [13], [14], [25] e suas referências.

Neste capítulo fomos motivados pelos trabalhos de Alves,Bertone e Gonçalves [2] e Alves e Bertone [1], onde em [2] os autores estudaram questões de existência e multiplicidade e regularidade para o caso local

$$-\Delta u = \lambda h(x)H(u-a)u^q + u^{2^*-1} \text{ em } \mathbb{R}^N$$

e em [1] os mesmos obtiveram resultados de existência e multiplicidade para o problema local

$$-\Delta_p u = H(u-a)u^{p*-1} + \lambda h(x) \text{ em } \mathbb{R}^N$$

Neste artigo foi utilizado uma variante para funcionais localmente Lipschitz do Teorema do Passso da Montanha, o Princípio Variacional de Ekeland e Cálculo Subdiferencial. Usaremos as mesmas técnicas utilizadas pelos autores para provar um resultado de existência e multiplicidade para o problema (18).

Os resultados centrais do capítulo 5 completam os estudos feito nos artigos [2] e [1] nos seguintes aspectos:

1) Estamos trabalhando com o caso não-local.

2) Consideramos uma nova classe de funções $M$.

Para finalizar esta introdução e para maior clareza deste trabalho, repetiremos os problemas e os enunciados dos principais resultados nos seus respectivos capítulos.

# Notações

$\blacksquare$ : fim de uma demonstração,

$\rightarrow$ : convergência forte,

$\rightharpoonup$ convergência fraca,

$|A|$ : medida de Lebesgue de um conjunto $A$,

$\int_{\Omega} f$ : denota $\int_{\Omega} f(x)dx$,

$Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$: denota o espaço dos funcionais localmente lipschitzianos.

# Capítulo 1

# Sobre uma Equação Elíptica do Tipo p-Kirchhoff

## 1.1 Caso $M_p$-Linear

Nesta seção mostraremos a existência de solução fraca para o problema

$$\begin{cases} -[M(||u||_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u = f \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $p > 1$, $f \in W^{-1,q}(\Omega)$, $q$ é o expoente conjugado de $p$, isto é, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $W^{-1,q}(\Omega)$ é o dual topológico de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Como foi dito anteriormente, no próximo resultado serão usados argumentos semelhantes aos apresentados na seção 2 de [5] em que os autores adaptaram algumas idéias de [19] e [20] nos quais são usadas outras classes de problemas não-locais. Nesta seção, será usada fortemente a p-homogeneidade do operador p-Laplaciano e a unicidade de solução fraca do problema (9).

**Teorema 1.1** *Para cada $0 \neq f \in W^{-1,q}(\Omega)$ o problema (1.1) e a equação*

$$M(t)t^{1/p} = ||w||_{1,p}, \quad t > 0 \tag{1.2}$$

*possuem as mesmas quantidade de soluções, onde $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é a única solução do problema (9).*

**Demonstração:** Suponhamos, primeiramente, que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ seja uma solução de (1.1), onde $0 \neq f \in W^{-1,q}(\Omega)$ é fixada. Assim,

$$-div\left(|\nabla(M(||u||_{1,p}^p)u)|^{p-2}\nabla(M(||u||_{1,p}^p)u)\right) = f.$$

Conseqüentemente, $w = M(||u||_{1,p}^p)u$ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p w = f \text{ em } \Omega, \\ w = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

Notando que $||w||_{1,p} = M(||u||_{1,p}^p)||u||_{1,p}$, concluímos que $t = ||u||_{1,p}^p$ é solução da equação (1.2).

Reciprocamente, seja $w$ uma solução de (1.3) e suponhamos que $t > 0$ seja solução de (1.2).

Defina

$$u = t^{1/p} \frac{w}{||w||_{1,p}} \tag{1.4}$$

e assim $||u||_{1,p} = t^{1/p}$. Logo

$$\begin{aligned} -[M(||u||_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u &= -[M(t)]^{p-1} div\left(\left|\nabla\left(\frac{t^{1/p}w}{||w||_{1,p}}\right)\right|^{p-2}\nabla\left(\frac{t^{1/p}w}{||w||_{1,p}}\right)\right) \\ &= -[M(t)]^{p-1}\frac{t^{(p-2)/p}t^{1/p}}{||w||_{1,p}^{p-2}||w||_{1,p}}\Delta_p w \\ &= \left[\frac{M(t)t^{1/p}}{||w||_{1,p}}\right]^{p-1}(-\Delta_p w). \end{aligned}$$

Como $t > 0$ é solução de $M(t)t^{1/p} = ||w||_{1,p}$, temos

$$\frac{M(t)t^{1/p}}{||w||_{1,p}} = 1$$

e assim

$$-[M(||u||_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u = -\Delta_p w = f.$$

Segue-se, então, que

$$\begin{cases} -[M(||u||_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u = f \text{ em } \Omega, \\ \qquad\qquad u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

o que conclui a prova do teorema. ■

**Observação 1.1** Suponhamos que $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ seja uma função contínua. Portanto, $t \to M(t)t^{1/p}$ é contínua para $t \geq 0$ e daí

$$\lim_{t\to 0^+} M(t)t^{1/p} = 0.$$

Suponhamos, além disso, que existam $t_0, m_0 > 0$ tais que $M(t) \geq m_0 > 0$ para $t \geq t_0$.

Nesse caso,

$$\lim_{t\to\infty} M(t)t^{1/p} = +\infty.$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t > 0$ tal que

$$M(t)t^{1/p} = ||w||_{1,p}.$$

Em particular, se $M(t)t^{1/p}$ for uma função crescente para $t > 0$, o problema (1.1) possui somente uma solução para cada $0 \neq f \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Esse é o caso se $M$ for uma função diferenciável com $M'(t) > 0$, para todo $t > 0$.

Se $M(t) = e^{-t}$, para $t \geq 0$, o problema (1.1) possui o mesmo número de soluções da equação

$$e^{-t} t^{1/p} = ||w||_{1,p}.$$

Observemos que

$$g(t) = e^{-t} t^{1/p}$$

satisfaz $g(0) = 0$ e $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 0$.

Notando que $g'(t) = -e^{-t} t^{1/p} + \frac{1}{p} e^{-t} t^{1/p-1}$ e que $g'(t) = 0$ se, e somente se $t = \frac{1}{p}$, segue-se que $g$ atinge seu ponto de máximo em $t = \frac{1}{p}$ e $g(\frac{1}{p}) = \dfrac{1}{e^{1/p} \sqrt[p]{p}}$.

Portanto,

- se $||w||_{1,p} > \dfrac{1}{e^{1/p} \sqrt[p]{p}}$ o problema (1.1) não possui solução;
- se $||w||_{1,p} = \dfrac{1}{e^{1/p} \sqrt[p]{p}}$ o problema (1.1) possui somente uma solução;
- se $0 < ||w||_{1,p} < \dfrac{1}{e^{1/p} \sqrt[p]{p}}$ o problema (1.1) possui exatamente duas soluções.

Como podemos observar, a presença do termo $[M(||u||^p_{1,p})]^{p-1}$ produz grandes diferenças entre o problema não-local (1.1) e o problema local (9).

**Observação 1.2** Consideremos o caso $f = 0$, isto é,

$$\begin{cases} -[M(||u||^p_{1,p})]^{p-1} \Delta_p u = 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.5}$$

Se $M(t) > 0$ para todo $t \geq 0$, o problema (1.5) possui a solução nula como única solução. Se $M(t_0) = 0$, para algum $t_0 > 0$, então o problema (1.5) possui infinitas soluções. De fato, se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $u \neq 0$, segue-se que

$$v = t_0^{1/p} \frac{u}{||u||_{1,p}}$$

é solução de (1.5).

## 1.2 Um Problema Sublinear

Nesta seção vamos nos deter no estudo do problema sublinear

$$\begin{cases} -[M(||u||^p_{1,p})]^{p-1} \Delta_p u = u^\alpha \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

em que $\alpha$ satisfaz $0 < \alpha < p - 1$ com $p > 1$.

Tal tipo de problema pertence a uma classe de problemas conhecidos como sublinear, cujo protótipo é

$$\begin{cases} -\Delta u = u^\alpha \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.7}$$

com $0 < \alpha < 1$ (note que, neste caso $p = 2$), o qual já foi vastamente estudado. Consulte, por exemplo [34],[16], [30] e [17].

Para o problema não-local, com $p = 2$, citamos [3],[5], [44] e suas referências.

Em particular, Diaz-Saa [30] estudaram o problema (10) e mostraram que ele possui somente uma solução positiva $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Além disso, essa solução também pertence a $W^{2,2}_{loc}(\Omega)$.

Nosso próximo resultado descreve o que acontece com o problema sublinear não-local (1.6) no qual usaremos fortemente a p-homogeneidade do operador p-Laplaciano e a unicidade de solução do problema (10).

**Teorema 1.2** *Suponhamos que $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua satisfazendo $M(t) > 0$ para todo $t \geq 0$. Então o problema (1.6) possui o mesmo número de soluções da equação*

$$[M(t)]^{p-1} t^{(p-1-\alpha)/p} = ||v||_{1,p}^{p-1-\alpha}, \quad t > 0, \tag{1.8}$$

*onde $v$ é a solução de (10).*

**Demonstração:** Adaptamos para o problema (1.6) as idéias desenvolvidas em [5] e [44]. Suponhamos que $t > 0$ seja solução da equação (1.8) e seja $\gamma = \dfrac{t^{1/p}}{||v||_{1,p}}$, o que implica $||\gamma v||_{1,p} = t^{1/p}$. Assim, simples cálculos mostram que

$$[M(||\gamma v||_{1,p}^p)]^{p-1} = \gamma^{\alpha-(p-1)}.$$

Definamos $u = \gamma v$. Mostraremos que tal função $u$ é solução do problema (1.6). De fato, de cálculos diretos,

$$\begin{aligned} -[M(||u||_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u &= -[M(||\gamma v||_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p(\gamma v) \\ &= -[M(||\gamma v||_{1,p}^p)]^{p-1} div(|\nabla(\gamma v)|^{p-2}\nabla(\gamma v)) \\ &= -[M(||\gamma v||_{1,p}^p)]^{p-1} div(\gamma^{p-2}\gamma|\nabla v|^{p-2}\nabla v) \\ &= [M(||\gamma v||_{1,p}^p)]^{p-1}\gamma^{p-1}(-\Delta_p v) \\ &= \gamma^{\alpha-(p-1)}\gamma^{p-1}(-\Delta_p v) \\ &= \gamma^\alpha v^\alpha = (\gamma v)^\alpha = u^\alpha \text{ em } \Omega. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, $u$ é solução do problema (1.6). ■

**Observação 1.3** *A observação* (1.1) *continua válida para o problema (1.6).*

## 1.3 Caso $M_p(x)$-Linear

Na Seção 1.1 estudamos o problema $M_p$-Linear em que a função $M$ não dependia da variável $x \in \Omega$. Esse fato permitiu que usássemos uma técnica em que a homogeneidade era fundamental. Entretanto, se $M$ depender também da variável $x \in \overline{\Omega}$ não podemos aplicar a técnica empregada na prova do Teorema 1.1. Na presente seção vamos considerar o seguinte problema

$$\begin{cases} -[M(x, \|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u = f(x) \;\; \text{em} \;\; \Omega, \\ \\ u = 0 \;\; \text{em} \; \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.9}$$

em que $M : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função dada e $f \in L^q(\Omega)$, com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Consideramos as seguintes hipóteses sobre $M$:

$(m_1)$ $M(x, \lambda) \geq m_0$, para todo $(x, \lambda) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+$.

$(m_2)$ Para cada intervalo $I$, existe uma constante positiva $C_I$ tal que

$$|[M(x, \lambda_1)]^{p-1} - [M(x, \lambda_2)]^{p-1}| \leq C_I|\lambda_1 - \lambda_2|, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}, \;\; \lambda_1, \lambda_2 \in I.$$

Iniciaremos enunciando o Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer, cuja demonstração pode ser encontrada em [33], o qual será usado para demonstrar o resultado principal desta seção.

**Proposição 1.1** *Seja $T : X \to X$ um operador contínuo e compacto, onde $X$ é um espaço de Banach. Suponhamos que o conjunto $E = \{x \in X; x = \lambda Tx, \text{ para algum } 0 \leq \lambda \leq 1\}$ seja limitado. Então $T$ possui um ponto fixo.*

Temos o seguinte resultado;

**Teorema 1.3** *Seja $M \in C(\Omega \times \mathbb{R}^+)$, satisfazendo $(m_1) - (m_2)$. Para cada $f \in L^q(\Omega)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, o problema (1.9) possui uma solução $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

**Demonstração:** Seja $f \in L^q(\Omega)$ uma função fixada. Dada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, designaremos por $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ a solução única do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \dfrac{f(x)}{[M(x, \|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}} \;\; \text{em} \;\; \Omega, \\ \\ v = 0 \;\; \text{em} \; \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.10}$$

Dessa forma, temos bem definido o operador

$$\begin{aligned} S : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \\ u &\longrightarrow v = Su \end{aligned}$$

onde, para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é a única solução de (1.10).

**Afirmação 1.1** *$S$ é um operador contínuo.*

De fato, seja $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma seqüência tal que

$$u_n \to u \ \text{ em } \ W_0^{1,p}(\Omega).$$

Vamos mostrar que

$$v_n = Su_n \to v = Su \ \text{ em } \ W_0^{1,p}(\Omega).$$

Note que

$$\begin{cases} -\Delta_p v_n = \dfrac{f(x)}{[M(x, \|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}} \ \text{ em } \ \Omega, \\ \\ -\Delta_p v \ = \dfrac{f(x)}{[M(x, \|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}} \ \text{ em } \ \Omega, \\ \\ \quad v_n = v = 0 \ \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.11}$$

Usando $(v_n - v)$ como função teste em ambas as equações de (1.11), obtemos

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \nabla (v_n - v) = \int_\Omega \frac{f(x)(v_n - v)}{[M(x, \|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}}$$

e

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla (v_n - v) = \int_\Omega \frac{f(x)(v_n - v)}{[M(x, \|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}}$$

o que implica

$$\begin{aligned} & \int_\Omega (|\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n - |\nabla v|^{p-2} \nabla v) \nabla (v_n - v) \\ = & \int_\Omega f(x)(v_n - v) \left[ \frac{1}{[M(x, \|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}} - \frac{1}{[M(x, \|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}} \right]. \end{aligned}$$

Recordemos a desigualdade

$$(|\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n - |\nabla v|^{p-2} \nabla v, \nabla v_n - \nabla v) \geq \begin{cases} C_p |\nabla v_n - \nabla v|^p & \text{se} \quad p \geq 2, \\ \\ C_p \dfrac{|\nabla v_n - \nabla v|^p}{(|\nabla v_n| + |\nabla v|)^{2-p}} & \text{se} \ \ 1 < p < 2. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} C_p ||v_n - v||_{1,p}^p & \leq \int_\Omega f(x)(v_n - v) \left[ \frac{1}{[M(x, \|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}} - \frac{1}{[M(x, \|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}} \right] \\ & \leq \int_\Omega |f(x)||v_n - v| \left| \frac{1}{[M(x, \|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}} - \frac{1}{[M(x, \|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}} \right| \\ & = \int_\Omega |f(x)||v_n - v| \left| \frac{[M(x, \|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1} - [M(x, \|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}}{[M(x, \|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1} [M(x, \|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}} \right| \end{aligned}$$

e usando $(m_1)-(m_2)$,

$$C_p||v_n - v||^p \leq \int_\Omega f(x)|v_n - v| C\frac{|\|u_n\|_{1,p}^p - \|u\|_{1,p}^p|}{m_0^{2(p-1)}}.$$

Da desigualdade de Hölder e das imersões de Sobolev

$$C_p||v_n - v||^p \leq C\frac{|\|u_n\|_{1,p}^p - \|u\|_{1,p}^p|}{m_0^{2(p-1)}}|f|_q||v_n - v||_{1,p}$$

isto é,

$$||v_n - v||_{1,p}^{p-1} \leq \frac{\widetilde{C}|f|_q}{m_0^{2(p-1)}}|\|u_n\|_{1,p}^p - \|u\|_{1,p}^p| \to 0.$$

Portanto,

$$v_n = Su_n \to v = Su \ \text{ em } \ W_0^{1,p}(\Omega)$$

o que mostra a continuidade de $S$.

**Afirmação 1.2** *$S$ é um operador compacto.*

Com efeito, consideremos $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma seqüência limitada e façamos

$$v_n = Su_n.$$

Mostraremos que $(v_n)$ possui uma subseqüência convergente em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Da definição de $S$, temos

$$\begin{cases} -\Delta_p v_n = \dfrac{f(x)}{[M(x, \|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}} \ \text{ em } \ \Omega, \\ \\ \quad v = 0 \ \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.12}$$

Usando $v_n$ como função teste segue-se que

$$\begin{aligned} \|v_n\|_{1,p}^p &= \int_\Omega \frac{f(x)v_n}{[M(x, \|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}} \\ &\leq \frac{1}{m_0^{p-1}}\int_\Omega |f(x)||v_n| \\ &\leq \frac{C}{m_0^{p-1}}|f(x)|_q\|v_n\|_{1,p}. \end{aligned}$$

Isso implica em

$$\|v_n\|^{p-1} \leq \frac{C}{m_0}|f(x)|_q,$$

e assim $(v_n)$ é uma seqüência limitada. Sendo $W_0^{1,p}(\Omega)$ reflexivo, a menos de subseqüência,

$$v_n \rightharpoonup v \ \text{ em } \ W_0^{1,p}(\Omega)$$

e das imersões compactas

$$v_n \to v \ \text{ em } \ L^p(\Omega).$$

Usando $(v_n - v)$ como função teste em (1.12),

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \nabla(v_n - v) = \int_\Omega \frac{f(x)(v_n - v)}{[M(x, \|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}},$$

de onde segue-se que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n - |\nabla v|^{p-2}\nabla v + |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\nabla v \nabla(v_n - v) \\ = \ &\int_\Omega f(x)(v_n - v)\left[\frac{1}{[M(x, \|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}}\right] \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\nabla v \nabla(v_n - v) + \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla(v_n - v) \\ = \ &\int_\Omega f(x)(v_n - v)\left[\frac{1}{[M(x, \|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}}\right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$C_p\|v_n - v\|_{1,p}^p + o_n(1) \le \int_\Omega \frac{f(x)(v_n - v)}{[M(x, \|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}}$$

onde $o_n(1) = \displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla(v_n - v)$ devido a $v_n \rightharpoonup v$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Note que

$$\int_\Omega \frac{f(x)(v_n - v)}{[M(x, \|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}} \le \frac{1}{m_0^{p-1}}|f|_q|v_n - v|_p.$$

Usando, novamente, a seguinte desigualdade

$$(|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n - |\nabla v|^{p-2}\nabla v, \nabla v_n - \nabla v) \ge \begin{cases} C_p|\nabla v_n - \nabla v|^p & \text{se } \ p \ge 2, \\[2mm] C_p\dfrac{|\nabla v_n - \nabla v|^p}{(|\nabla v_n| + |\nabla v|)^{2-p}} & \text{se } \ 1 < p < 2, \end{cases}$$

segue-se

$$C_p\|v_n - v\|_{1,p}^p \le \frac{1}{m_0^{p-1}}|f|_q|v_n - v|_p \to 0$$

implicando que $v_n \to v$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, o que mostra a compacidade de $S$.

Resta-nos mostrar que o conjunto

$$E = \{x \in W_0^{1,p}(\Omega); u = \lambda S u, \text{ para algum } 0 < \lambda < 1\}$$

é limitado.

De fato, seja $u = \lambda S u$, $0 < \lambda < 1$, $\left(Su = \dfrac{u}{\lambda}\right)$. Dessa forma,

$$\begin{cases} -\Delta_p\left(\dfrac{u}{\lambda}\right) = \dfrac{f(x)}{[M(x, \|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}} \quad \text{em } \Omega, \\ \\ u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo

$$-div\left[|\nabla\left(\frac{u}{\lambda}\right)|^{p-2}\nabla\left(\frac{u}{\lambda}\right)\right] = \frac{f(x)}{[M(x, \|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}},$$

de onde temos

$$-\frac{1}{\lambda^{p-1}} div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \frac{f(x)}{[M(x, \|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}},$$

o que implica

$$-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \frac{\lambda^{p-1} f(x)}{[M(x, \|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}},$$

isto é,

$$-\Delta_p u = \frac{\lambda^{p-1} f(x)}{[M(x, \|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}} \quad \text{em } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Usando $u$ como função teste na igualdade acima, da desigualdade de Hölder e das imersões de Sobolev,

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,p}^p &= \lambda^{p-1} \int_\Omega \frac{f(x) u}{[M(x, \|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}} \\ &\leq \frac{\lambda^{p-1} |f|_q}{m_0^{p-1}} \|u\|_{1,p}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|u\|_{1,p}^{p-1} \leq \frac{1}{m_0^{p-1}} |f|_q.$$

Isto implica que o conjunto de soluções de

$$u = \lambda S u, \quad 0 < \lambda < 1$$

é limitado, ou seja, o conjunto $E$ é limitado. Do Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer, existe uma solução de $u = Su$, isto é, existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tal que

$$\begin{cases} -[M(x, \|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p(u) = f(x) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

no sentido fraco. ■

# Capítulo 2

# Problemas Não-Locais com Termos Singulares

## 2.1 Problema Singular via Método de Galerkin

Como foi mencionado na introdução, nesta seção vamos estudar o problema

$$\begin{cases} -[M(\|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u = \dfrac{h(x)}{u^{\gamma-p+2}} + u^{\alpha-p+2} \ \text{ em } \ \Omega, \\ \\ u > 0 \ \text{ em } \Omega, \\ \\ u = 0 \ \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

que é uma perturbação singular do problema (1.6), em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, regular, $2 \leq p < N$ e $h$ é uma função definida em $\Omega$.

Usaremos o método de Galerkin para resolver o problema (2.1) e para tal precisaremos do seguinte resultado, que é uma variação do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, cuja demonstração pode ser encontrada em [42].

**Proposição 2.1** *Suponhamos que $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ seja uma função contínua tal que $< F(\xi), \xi > \geq 0$ com $|\xi| = r$, para algum $r > 0$, onde $< \cdot, \cdot >$ representa o produto interno usual do $\mathbb{R}^m$ e $|.|$ sua correspondente norma. Então existe $\xi_0 \in \overline{B_r}(0)$ tal que $F(\xi_0) = 0$.*

Suporemos que $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua satisfazendo:

$(M_1)$ Existem $m_0 > 0$ e $\theta_1 > 0$ tais que $M(t) \geq m_0$ se $t \geq \theta_1$;

$(M_2)$ $\theta_2 = \sup\{t > 0; M(t) = 0\} > 0$.

Note que, por $(M_1) - (M_2)$, a função $M$ poderá se anular em algum ponto de $[0, \theta_2]$, o que difere o problema (2.1) dos outros estudados até agora neste trabalho.

Se $M(t) \geq m_0 > 0$, para todo $t \geq 0$, a condição $(M_2)$ é vazia.

Recordamos que uma solução de (2.1) é uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u > 0$ em $\Omega$, que satisfaz (2.1) no sentido fraco, isto é,

$$[M(||u||_{1,p}^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi = \int_\Omega \left( \frac{h(x)}{u^{\gamma-p+2}} + u^{\alpha-p+2} \right) \phi,$$

para toda $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Outro importante resultado que será utilizado nesta seção é a desigualdade de Hardy-Sobolev, cuja demonstração poderá ser vista em [37].

**Lema 2.1** *Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $1 < p \leq N$, então $\dfrac{u}{\psi_1^\tau} \in L^r(\Omega)$, onde $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1-\tau}{N}$, $0 \leq \tau \leq 1$, e*

$$\left| \frac{u}{\psi_1^\tau} \right|_r \leq C \|\nabla u\|_p,$$

*onde $C > 0$ e $\psi_1$ é a autofunção de $(-\Delta_p, W_0^{1,p}(\Omega))$ associada ao primeiro autovalor $\lambda_1$.*

Nosso principal resultado nesta seção é o seguinte:

**Teorema 2.1** *Sejam $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva em $\overline{\Omega}$, $\gamma, \alpha \in (p-2, p-1)$, $2 \leq p < N$ e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua satisfazendo $(M_1) - (M_2)$. Então o problema (2.1) possui uma solução positiva.*

Dividiremos a prova do Teorema 2.1 em alguns lemas. Primeiramente, para cada $\epsilon > 0$ fixado, consideraremos o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} -[M(\|u\|_{1,p}^p)]^{p-1} \Delta_p u = \dfrac{h(x)}{(\epsilon + u)^{\gamma-p+2}} + u^{\alpha-p+2} \ \text{ em } \ \Omega, \\[2ex] u > 0 \ \text{ em } \Omega, \\[2ex] u = 0 \ \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

No que segue, suporemos que $M, h, \alpha$ e $\gamma$ satisfazem as hipóteses do Teorema 2.1.

**Lema 2.2** *Para cada $\epsilon > 0$ fixado, o problema (2.2) possui uma solução $u_\epsilon$.*

**Demonstração:** Consideremos o problema

$$\begin{cases} -[M^+(\|u\|_{1,p}^p)]^{p-1} \Delta_p u = \dfrac{h(x)}{(\epsilon + |u|)^{\gamma-p+2}} + |u|^{\alpha-p+2} \ \text{ em } \ \Omega, \\[2ex] u = 0 \ \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $M^+ : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é dada por

$$M^+(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq \mathrm{t} \leq \theta_2, \\ \\ M(t) & \text{se} \quad \mathrm{t} > \theta_2. \end{cases}$$

Seja $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, e_3, ...\}$ uma base de Schauder de $W_0^{1,p}(\Omega)$ (recordamos que uma base de Schauder de um espaço de Banach $X$ é uma seqüência $(e_n) \subset X$ tal que, para cada $z \in X$, existe uma única seqüência de escalares $(\alpha_n)$ para a qual a soma parcial $\sum \alpha_n e_n$ converge para $z$ na norma de $X$). Para mais informações sobre bases de Schauder veja [15] e suas referências.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $\mathbb{V}_m = [e_1, ..., e_m] \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de dimensão finita gerado por $e_1, \ldots, e_m$. Assim, cada $u \in \mathbb{V}_m$ é representado de maneira única por $u = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j$. Uma norma que vamos utilizar em $\mathbb{V}_m$ é dada por

$$||u||_m = \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|.$$

Notemos que $(\mathbb{V}_m, || \cdot ||_m)$ e $(\mathbb{R}^m, | \cdot |_s)$ são isometricamente isomorfos por intermédio da aplicação

$$\begin{aligned} T : (\mathbb{V}_m, ||.||_m) \quad &\longrightarrow \quad (\mathbb{R}^m, |.|_s) \\ u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j \quad &\longrightarrow \quad T(u) = \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m) \end{aligned}$$

$$||u||_m = |\xi|_s = |T(u)|_s$$

onde $|\xi|_s = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} |\xi_j|$.

A partir daqui, sem nenhum comentário adicional, identificaremos $u \in \mathbb{V}_m$ com $\xi \in \mathbb{R}^m$ via isometria $T$.

Desde que, para cada $m$, $\mathbb{V}_m$ é um espaço de dimensão finita, as normas $|| \cdot ||_m$ e $|| \cdot ||_{1,p}$, induzida por $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $\mathbb{V}_m$ são equivalentes. Assim, existem constantes positivas $c(m)$ e $k(m)$ tais que

$$c(m)||u||_m \leq ||u||_{1,p} \leq k(m)||u||_m.$$

Consideremos, para cada $m \in \mathbb{N}$, a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^m \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^m \\ \xi \quad &\longrightarrow \quad F(\xi) = (F_1(\xi), F_2(\xi), ..., F_m(\xi)) \end{aligned}$$

onde

$$F_j(\xi) = [M^+(||u||^p_{1,p})]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \ \nabla e_j - \int_\Omega \frac{h(x)e_j}{(\epsilon+|u|)^{\gamma-p+2}} - \int_\Omega |u|^{\alpha-p+2}e_j,$$

$j = 1, \ldots, m$.

Simples cálculos nos levam a

$$\begin{aligned} < F(\xi), \xi > &= [M^+(||u||^p_{1,p})]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u - \int_\Omega \frac{h(x)u}{(\epsilon+|u|)^{\gamma-p+2}} - \int_\Omega |u|^{\alpha-p+2}u \\ &= [M^+(||u||^p_{1,p})]^{p-1}||u||^p_{1,p} - \int_\Omega \frac{h(x)u}{(\epsilon+|u|)^{\gamma-p+2}} - \int_\Omega |u|^{\alpha-p+2}u. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\int_\Omega \frac{h(x)u}{(\epsilon+|u|)^{\gamma-p+2}} \leq ||h||_\infty \int_\Omega \frac{|u|}{\epsilon^{\gamma-p+2}} \leq C_\epsilon ||u||_{1,p}$$

e desde que $p-2 < \alpha < p-1$, temos $1 < \alpha - p + 3 < 2$, e assim

$$\int_\Omega |u|^{\alpha-p+2}u \leq \int_\Omega |u|^{\alpha-p+3} \leq C||u||^{\alpha-p+3}_{1,p}.$$

Conseqüentemente,

$$< F(\xi), \xi > \geq [M^+(||u||^p_{1,p})]^{p-1}||u||^p_{1,p} - C_\epsilon||u||_{1,p} - C||u||^{\alpha-p+3}_{1,p}$$

e por $(M_1)$, para $||u||^p_{1,p} \geq \theta_1$, teremos $M^+(||u||^p_{1,p}) = M(||u||^p_{1,p}) \geq m_0$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} < F(\xi), \xi > &\geq m_0^{p-1}||u||^p_{1,p} - C_\epsilon||u||_{1,p} - C||u||^{\alpha-p+3}_{1,p} \\ &\geq m_0^{p-1}[c(m)]^p||u||^p_m - C_\epsilon k(m)||u||_m - [k(m)]^{\alpha-p+3}C||u||^{\alpha-p+3}_m \\ &\geq m_0^{p-1}C(m)|\xi|^p_s - N_\epsilon(m)|\xi|_s - Q(m)|\xi|^{\alpha-p+3}_s. \end{aligned}$$

Fixemos $\rho_m > 0$ e para $\xi \in \mathbb{R}^m$, $|\xi|_s = \rho_m$, obtemos

$$< F(\xi,\xi) > \geq m_0^{p-1}C(m)\rho^p_m - N_\epsilon(m)\rho_m - Q(m)\rho^{\alpha-p+3}_m.$$

Assim, para $\rho_m$ suficientemente grande e notando que $1 < \alpha - p + 3 < 2 \leq p$, teremos

$$< F(\xi,\xi) > > 0 \ \text{ se } \ |\xi|_s = \rho_m,$$

o que implica

$$< F(\xi,\xi) > > 0 \ \text{ se } \ |\xi| = \rho^*_m,$$

onde $\rho^*_m > 0$, devido $|.|$ e $|.|_s$ serem equivalentes em $\mathbb{R}^m$.

Pela Proposição 2.1, existe $\xi^m \in \mathbb{R}^m$, com $|\xi^m| \leq \rho^*_m$, tal que $F(\xi^m) = 0$, ou seja, existe $|\xi^m|_s \leq \rho_m$ tal que $F(\xi^m) = 0$.

Da identificação isométrica de $(\mathbb{R}^m; |.|_s)$ com $(\mathbb{V}_m; \|.\|_m)$, encontramos $(u_m) \subset \mathbb{V}_m$, $||u_m||_m \leq \rho_m$, isto é, $\|u_m\|_{1,p} \leq \overline{\rho}_m$ tal que

$$[M^+(||u_m||_{1,p}^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla e_j - \int_\Omega \frac{h(x) e_j}{(\epsilon + |u_m|)^{\gamma-p+2}} - \int_\Omega |u_m|^{\alpha-p+2} e_j = 0,$$

onde $j = 1, \ldots, m,$, o que nos dá

$$[M^+(||u_m||_{1,p}^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w - \int_\Omega \frac{h(x) w}{(\epsilon + |u_m|)^{\gamma-p+2}} - \int_\Omega |u_m|^{\alpha-p+2} w = 0,$$

para todo $w \in \mathbb{V}_m$.

Desde que $(u_m) \subset \mathbb{V}_m$ tem-se

$$[M^+(||u_m||_{1,p}^p)]^{p-1} ||u_m||_{1,p}^p - \int_\Omega \frac{h(x) u_m}{(\epsilon + |u_m|)^{\gamma-p+2}} - \int_\Omega |u_m|^{\alpha-p+2} u_m = 0.$$

Devido a

$$\int_\Omega \frac{h(x) u_m}{(\epsilon + |u_m|)^{\gamma-p+2}} \leq \frac{||h||_\infty}{\epsilon^{\gamma-p+2}} \int_\Omega |u_m| \leq C_\epsilon ||u_m||_{1,p}$$

e

$$\int_\Omega |u_m|^{\alpha-p+2} u_m \leq C ||u_m||_{1,p}^{\alpha-p+3}$$

obtemos

$$[M^+(||u_m||_{1,p}^p)]^{p-1} ||u_m||_{1,p}^p \leq C_\epsilon ||u_m||_{1,p} + C ||u_m||_{1,p}^{\alpha-p+3}. \tag{2.4}$$

Mostraremos a seguir que $(\|u_m\|_{1,p})$ é limitada.

De fato, suponhamos por contradição que $(\|u_m\|_{1,p})$ não seja limitada. Logo, a menos de subseqüência $\|u_m\|_{1,p} \to +\infty$. Da condição $(M_1)$ e da desigualdade (2.4) teremos

$$0 < m_0^{p-1} \|u_m\|_{1,p}^p \leq C_\epsilon \|u_m\|_{1,p} + C \|u_m\|_{1,p}^{\alpha-p+3}$$

de onde segue que

$$0 < m_0^{p-1} \leq \frac{C_\epsilon}{\|u_m\|_{1,p}^{p-1}} + \frac{C}{\|u_m\|_{1,p}^{2p-\alpha-3}}.$$

Para $\|u_m\|_{1,p} \to +\infty$ teremos

$$0 < m_0^{p-1} \leq 0$$

o que é uma contradição. Portanto, $(||u_m||_{1,p})$ é limitada.

Assim, a menos de subseqüência,

$$\begin{aligned} ||u_m||_{1,p}^p &\to t_0, \\ u_m &\rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega), \\ u_m &\to u \text{ em } L^q(\Omega), \ \ 1 \leq q < p^*, \\ u_m(x) &\to u(x) \text{ q.s. em } \Omega. \end{aligned}$$

Da continuidade de $M$

$$[M^+(||u_m||_{1,p}^p)]^{p-1} \quad \to \quad [M^+(t_0)]^{p-1} \tag{2.5}$$

Fixemos $l \leq m$. Assim, $\mathbb{V}_l \subset \mathbb{V}_m$ e considere $\varphi \in \mathbb{V}_l$. Logo,

$$[M^+(||u_m||_{1,p}^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla\varphi = \int_\Omega \frac{h(x)\varphi}{(\epsilon+|u_m|)^{\gamma-p+2}} + \int_\Omega |u_m|^{\alpha-p+2}\varphi, \tag{2.6}$$

para toda $\varphi \in \mathbb{V}_l$.

Note que

$$\left|\frac{h(x)\varphi}{(\epsilon+|u_m|)^{\gamma-p+2}}\right| \leq \frac{C}{\epsilon^{\gamma-p+2}}|\varphi| \in L^1(\Omega)$$

e

$$\frac{h(x)\varphi}{(\epsilon+|u_m(x)|)^{\gamma-p+2}} \longrightarrow \frac{h(x)\varphi}{(\epsilon+|u(x)|)^{\gamma-p+2}} \quad \text{q.s. em } \Omega.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega \frac{h(x)\varphi}{(\epsilon+|u_m|)^{\gamma-p+2}} \longrightarrow \int_\Omega \frac{h(x)\varphi}{(\epsilon+|u|)^{\gamma-p+2}}. \tag{2.7}$$

Além disso, como $u_m \to u \in L^p(\Omega)$

$$|u_m|^{\alpha-p+2} \to |u|^{\alpha-p+2} \quad \text{em} \quad L^{p/(\alpha-p+2)}(\Omega)$$

e devido $\Omega$ ser um domínio limitado e $p < p/(\alpha-p+2)$ segue-se que $L^{p/(\alpha-p+2)}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. Assim,

$$|u_m|^{\alpha-p+2} \longrightarrow |u|^{\alpha-p+2} \quad \text{em} \quad L^p(\Omega).$$

Conseqüentemente,

$$|u_m(x)|^{\alpha-p+2} \longrightarrow |u(x)|^{\alpha-p+2} \quad \text{q.s. em } \Omega$$

e existe $g \in L^p(\Omega)$ tal que

$$|u_m(x)|^{\alpha-p+2} \leq g(x) \quad \text{q.s. em } \Omega \text{ e para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma

$$||u_m|^{\alpha-p+2}\varphi| \leq g|\varphi| \in L^1(\Omega)$$

e usando novamente o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega |u_m|^{\alpha-p+2}\varphi \longrightarrow \int_\Omega |u|^{\alpha-p+2}\varphi \quad \text{para toda } \varphi \in \mathbb{V}_l. \tag{2.8}$$

Vamos agora considerar a seguinte afirmação cuja demonstração será feita no Apêndice A.2.

**Afirmação 2.1** *Para toda* $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$[M^+(||u_m||_{1,p}^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla \varphi \longrightarrow [M^+(t_0)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi.$$

Na igualdade (2.6), fazendo $m \to \infty$, usando (2.5),(2.7), (2.8) e a Afirmação 2.1, obtemos

$$[M^+(t_0)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega \frac{h(x)\varphi}{(\epsilon + |u|)^{\gamma-p+2}} + \int_\Omega |u|^{\alpha-p+2} \varphi,$$

para toda $\varphi \in \mathbb{V}_l$.

Desde que $l \in \mathbb{N}$ é arbitrário, a igualdade acima é válida para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Em vista disso, $[M^+(t_0)] > 0$. De fato, se $[M^+(t_0)] = 0$ teríamos

$$\int_\Omega \frac{h(x)\varphi}{(\epsilon + |u|)^{\gamma-p+2}} + \int_\Omega |u|^{\alpha-p+2} \varphi = 0, \text{ para toda } \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

conseqüentemente,

$$\int_\Omega \left( \frac{h(x)}{(\epsilon + |u|)^{\gamma-p+2}} + |u|^{\alpha-p+2} \right) \varphi = 0, \text{ para toda } \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Logo,

$$\frac{h(x)}{(\epsilon + |u|)^{\gamma-p+2}} + |u|^{\alpha-p+2} = 0$$

implicando em

$$\frac{h(x)}{(\epsilon + |u|)^{\gamma-p+2}} = 0 \text{ e } |u|^{\alpha-p+2} = 0$$

o que é um absurdo.

Assim, $M^+(t_0) = M(t_0)$, de onde segue-se

$$[M(t_0)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega \frac{h(x)\varphi}{(\epsilon + |u|)^{\gamma-p+2}} + \int_\Omega |u|^{\alpha-p+2} \varphi, \tag{2.9}$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Usando $u$ como função teste na igualdade (2.9) obtemos

$$[M(t_0)]^{p-1} ||u||_{1,p}^p = \int_\Omega \frac{h(x)u}{(\epsilon + |u|)^{\gamma-p+2}} + \int_\Omega |u|^{\alpha-p+2} u. \tag{2.10}$$

Façamos $\varphi = u_m$ em (2.6) para obter

$$[M^+(||u_m||_{1,p}^p)]^{p-1} ||u_m||_{1,p}^p = \int_\Omega \frac{h(x)u_m}{(\epsilon + |u_m|)^{\gamma-p+2}} + \int_\Omega |u_m|^{\alpha-p+2} u_m. \tag{2.11}$$

Sabemos

$$\left|\frac{h(x)u_m}{(\epsilon+|u_m|)^{\gamma-p+2}}\right| \leq \frac{C}{\epsilon^{\gamma-p+2}}|u_m|$$

e desde que $u_m \to u \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q < p^*$, segue-se

$$|u_m(x)| \to |u(x)| \ \text{ q.s. em } \ \Omega$$

e existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|u_m(x)| \leq g(x) \ \text{ q.s. em } \ \Omega, \ \text{ para todo } \ m \in \mathbb{N}.$$

Conseqüentemente,

$$\left|\frac{h(x)u_m}{(\epsilon+|u_m|)^{\gamma-p+2}}\right| \leq \frac{C}{\epsilon^{\gamma-p+2}}|u_m| \leq \frac{C}{\epsilon^{\gamma-p+2}} g \in L^1(\Omega).$$

Além disso,

$$\int_\Omega \frac{h(x)u_m(x)}{(\epsilon+|u_m(x)|)^{\gamma-p+2}} \longrightarrow \int_\Omega \frac{h(x)u(x)}{(\epsilon+|u(x)|)^{\gamma-p+2}}.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_\Omega \frac{h(x)u_m}{(\epsilon+|u_m|)^{\gamma-p+2}} \longrightarrow \int_\Omega \frac{h(x)u}{(\epsilon+|u|)^{\gamma-p+2}} \tag{2.12}$$

Temos ainda que

$$||u_m|^{\alpha-p+2}u_m| = |u_m|^{\alpha-p+3}$$

e novamente como

$$u_m \to u \ \text{ em } \ L^q(\Omega), \ \ 1 \leq q < p^*$$

e $1 < \alpha - p + 3 < 2$, tem-se

$$u_m \to u \ \text{ em } \ L^{\alpha-p+3}(\Omega).$$

Daí

$$|u_m| \to |u| \ \text{ em } \ L^{\alpha-p+3}(\Omega)$$

o que implica

$$|u_m|^{\alpha-p+3} \to |u|^{\alpha-p+3} \ \text{ em } \ L^1(\Omega)$$

assim

$$|u_m(x)|^{\alpha-p+3} \to |u(x)|^{\alpha-p+3} \ \ q.s. \ \text{ em } \ \Omega$$

e existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|u_m|^{\alpha-p+3} \leq g \;\; q.s. \;\; \text{em} \;\; \Omega \;\; \text{e} \;\; \text{para} \;\; \text{todo} \;\; m \in \mathbb{N}.$$

Novamente, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega |u_m|^{\alpha-p+2}u_m \longrightarrow \int_\Omega |u|^{\alpha-p+2}u. \tag{2.13}$$

Passando ao limite em ambos os lados da igualdade (2.11) e usando $||u_m||^p_{1,p} \to t_0$, (2.5), (2.12) e (2.13) temos

$$[M^+(t_0)]^{p-1}t_0 = \int_\Omega \frac{h(x)u}{(\epsilon+|u|)^{\gamma-p+2}} + \int_\Omega |u|^{\alpha-p+2}u. \tag{2.14}$$

Comparando esta última igualdade com (2.10) obtemos $t_0 = ||u||^p_{1,p}$, pois $M^+(t_0) > 0$. Logo, de (2.9) temos

$$[M(||u||^p_{1,p})]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi = \int_\Omega \frac{h(x)\varphi}{(\epsilon+|u|)^{\gamma-p+2}} + \int_\Omega |u|^{\alpha-p+2}\varphi$$

para toda $\varphi \in W^{1,p}_0(\Omega)$.

Isso mostra que $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ é uma solução fraca do problema auxiliar (2.2) a qual é positiva em virtude do Princípio do Maximo. Isto prova o lema. ∎

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, faça $\epsilon = 1/n$ e $u_{1/n} = u_n$ onde $u_{1/n}$ é a solução obtida no lema precedente.

**Lema 2.3** *Existe* $\delta > 0$ *tal que* $[M(||u_n||^p_{1,p})]^{p-1} \geq \delta > 0$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

**Demonstração:** Faremos a demonstração por contradição. Suponhamos que

$$\underline{\lim}[M(||u_n||^p_{1,p})]^{p-1} = 0. \tag{2.15}$$

Assim, temos que $(||u_n||^p_{1,p})$ é limitada, devido a hipótese $(M_1)$ pois, caso contrário, teríamos que, passando a subseqüência $||u_n||^p_{1,p} > \theta_1$, e assim

$$[M(||u_n||^p_{1,p})]^{p-1} \geq m_0^{p-1} > 0$$

e isso implicaria que

$$\underline{\lim}[M(||u_n||^p_{1,p})]^{p-1} \geq m_0^{p-1} > 0$$

o que é impossível devido a (2.15).

Portanto, a menos de subseqüência,

$$\begin{aligned} ||u_n||^p_{1,p} &\longrightarrow \theta_0, \\ u_n &\rightharpoonup u \;\text{ em }\; W^{1,p}_0(\Omega), \\ u_n(x) &\rightarrow u(x)\; q.s \text{ em } \Omega \end{aligned}$$

e, em vista da continuidade de $M$, temos

$$0 = \underline{\lim}[M(||u_n||_{1,p}^p)]^{p-1} = \lim[M(||u_n||_{1,p}^p)]^{p-1} = [M(\theta_0)]^{p-1}.$$

Note agora que

$$\begin{aligned}\frac{h(x)}{(1/n+t)^{\gamma-p+2}} + t^{\alpha-p+2} &\geq \frac{h(x)}{(1+t)^{\gamma-p+2}} + t^{\alpha-p+2} \geq C\frac{1}{(1+t)^{\gamma-p+2}} + t^{\alpha-p+2} \\ &\geq \widetilde{C}\left[\frac{1}{(1+t)^{\gamma-p+2}} + t^{\alpha-p+2}\right] \geq C_0 > 0, \qquad (2.16)\end{aligned}$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $t \geq 0$, pois a função $t \mapsto \left(\frac{1}{(1+t)^{\gamma-p+2}} + t^{\alpha-p+2}\right)$, $t \geq 0$, atinge um mínimo positivo.

Desde que

$$\begin{cases} -[M(||u_n||_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u_n = \dfrac{h(x)}{(1/n+u_n)^{\gamma-p+2}} + u_n^{\alpha-p+2} \geq C_0 > 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ \\ u_n = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

e fazendo $\varphi \in C_0^1(\overline{\Omega})$, $\varphi > 0$, como função teste na última igualdade, obtemos

$$[M(||u_n||_{1,p}^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi \geq C_0\int_\Omega \varphi > 0. \qquad (2.17)$$

Note que $[M(||u_n||_{1,p}^p)]^{p-1} > 0$, pois caso contrário $0 \geq C_0 \int_\Omega \varphi > 0$, o que é um absurdo. Passando ao limite na expressão (2.17) e argumentando como na demonstração da Afirmação 2.1, obtemos

$$0 = [M(\theta_0)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi \geq C_0\int_\Omega \varphi > 0$$

pois $[M(\theta_0)]^{p-1} = 0$. Assim,

$$0 \geq C_0\int_\Omega \varphi > 0$$

o que é uma contradição e a demonstração do lema está completa. ■

**Lema 2.4** *A seqüência* $(||u_n||_{1,p}^p)$ *é limitada, onde* $u_n = u_{1/n}$ *é a solução obtida no Lema 2.2.*

**Demonstração:** Primeiramente, notemos que

$$[M(||u_n||_{1,p}^p)]^{p-1}||u_n||_{1,p}^p = \int_\Omega \frac{h(x)u_n}{(1/n+u_n)^{\gamma-p+2}} + \int_\Omega u_n^{\alpha-p+3}.$$

Observando que $(u_n^{p-\gamma-1}) \subset L^{1/p-\gamma-1}(\Omega)$, $1 < 1/p-\gamma-1$, usando a desigualdade de Hölder e as imersões de Sobolev temos

$$\int_\Omega \frac{h(x)u_n}{(1/n+u_n)^{\gamma-p+2}} \leq C\int_\Omega u_n^{p-\gamma-1} \leq \widetilde{C}|u_n|_{L^1(\Omega)}^{p-\gamma-1} \leq C_1\|u_n\|_{1,p}^{p-\gamma-1}.$$

Além disso,

$$\int_\Omega u_n^{\alpha-p+3} \leq C_2||u_n||_{1,p}^{\alpha-p+3}$$

onde $C_1$ e $C_2$ são constantes positivas independentes de $n$. Conseqüentemente,

$$\delta||u_n||_{1,p}^p \leq [M(||u_n||_{1,p}^p)]^{p-1}||u_n||_{1,p}^p \leq C_1||u_n||_{1,p}^{p-\gamma-1} + C_2||u_n||_{1,p}^{\alpha-p+3}.$$

Devido $p-\gamma-1<1$, $\alpha-p+3<2$ e $p\geq 2$ concluímos que $(||u_n||_{1,p}^p)$ é limitada. ■

Como conseqüência do lema anterior,

$$0<\delta \leq [M(||u_n||_{1,p}^p)]^{p-1} \leq M_\infty, \quad \text{para todo } \ n\in\mathbb{N} \tag{2.18}$$

**Lema 2.5** *A seqüência $(u_n)$, obtida no Lema 2.2, converge para uma solução do problema (2.1).*

**Demonstração:** Desde que $(u_n)$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, a menos de subseqüência,

$$\begin{array}{rcl} ||u_n||_{1,p}^p & \longrightarrow & t_0>0, \\ u_n & \rightharpoonup & u \ \text{ em } \ W_0^{1,p}(\Omega) \\ u_n & \longrightarrow & u \ \text{ em } \ L^q(\Omega), \ \ 1\leq q<p^*, \\ u_n(x) & \longrightarrow & u(x) \ \text{ q.s. em } \ \Omega. \end{array}$$

Da continuidade de $M$, obtém-se

$$M(||u_n||_{1,p}^p) \to M(t_0). \tag{2.19}$$

Seja $\psi_1>0$ a autofunção do operador $(-\Delta_p, W_0^{1,p}(\Omega))$ associada ao primeiro autovalor $\lambda_1$ tal que

$$C_0 > \lambda_1 M_\infty^{p-1}\psi_1^{p-1}, \quad \text{para todo } \ x\in\Omega,$$

onde $C_0$ é a constante obtida em (2.16). Conseqüentemente,

$$\begin{cases} -[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u_n = \dfrac{h(x)}{(1/n+u_n)^{\gamma-p+2}} + u_n^{\alpha-p+2} \ \text{ em } \ \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad \geq C_0 > \lambda_1 M_\infty^{p-1}\psi_1^{p-1} \ \text{ em } \ \Omega, \\ \qquad\qquad u_n=\psi_1=0 \ \text{ em } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Como

$$-[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u_n \geq C_0 > \lambda_1 M_\infty^{p-1}\psi_1^{p-1} \text{ em } \Omega$$

segue-se

$$-\Delta_p([M(\|u_n\|_{1,p}^p)]u_n) > -\Delta_p(M_\infty\psi_1) \text{ em } \Omega$$

e como $u_n = \psi_1 = 0$ em $\partial\Omega$, obtemos

$$[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]u_n = M_\infty\psi_1 = 0 \text{ em } \partial\Omega$$

isto é,

$$\begin{cases} -\Delta_p([M(\|u_n\|_{1,p}^p)]u_n) > -\Delta_p(M_\infty\psi_1) \text{ em } \Omega, \\ [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]u_n = M_\infty\psi_1 = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e pelo Princípio de Comparação

$$[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]u_n > M_\infty\psi_1 \text{ em } \Omega.$$

Assim, de (2.18)

$$u_n(x) > \frac{M_\infty\psi_1(x)}{M_\infty^{1/p-1}} \text{ em } \Omega. \tag{2.20}$$

De onde podemos concluir que $u_n(x) \nrightarrow 0$ para cada $x \in \Omega$.

Como

$$\left|\frac{h(x)\varphi}{(1/n+u_n)^{\gamma-p+2}}\right| \leq h(x)\frac{|\varphi|}{|u_n|^{\gamma-p+2}}$$

usando (2.20) segue-se

$$h(x)\frac{|\varphi|}{|u_n|^{\gamma-p+2}} < \frac{||h||_\infty}{C}\frac{\varphi}{\psi_1^{\gamma-p+2}}.$$

Da desigualdade de Hardy-Sobolev

$$\frac{||h||_\infty}{C}\frac{\varphi}{\psi_1^{\gamma-p+2}} \in L^1(\Omega).$$

Além disso,

$$\frac{h(x)\varphi}{(1/n+u_n(x))^{\gamma-p+2}} \to \frac{h(x)\varphi}{u(x)^{\gamma-p+2}} \quad q.s. \quad \text{em} \quad \Omega$$

assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_\Omega \frac{h(x)\varphi}{(1/n+u_n)^{\gamma-p+2}} \longrightarrow \int_\Omega \frac{h(x)\varphi}{u^{\gamma-p+2}}, \quad \text{para toda } \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.21}$$

De

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^p(\Omega)$$

segue-se

$$|u_n| \to |u| \ \text{ em } \ L^p(\Omega).$$

Sendo $\Omega$ um domínio limitado e $p < p/(\alpha - p + 2)$, tem-se $L^{p/(\alpha-p+2)}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ e assim,

$$u_n^{\alpha-p+2} \to u^{\alpha-p+2} \ \text{ em } \ L^p(\Omega).$$

Logo,

$$u_n(x)^{\alpha-p+2} \to u(x)^{\alpha-p+2} \ \ q.s. \ \text{ em } \ \Omega$$

e existe $g \in L^p(\Omega)$ tal que

$$|u_n^{\alpha-p+2}| \leq g \ \ q.s. \ \text{ em } \ \Omega \ \text{ e para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$|u_n^{\alpha-p+2}\varphi| \leq g|\varphi| \in L^1(\Omega)$$

usando novamente o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_\Omega u_n^{\alpha-p+2}\varphi \longrightarrow \int_\Omega u^{\alpha-p+2}\varphi, \tag{2.22}$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Como $(u_n)$ é solução do problema auxiliar,

$$[M(||u_n||_{1,p}^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi = \int_\Omega \frac{h(x)\varphi}{(1/n+u_n)^{\gamma-p+2}} + \int_\Omega u_n^{\alpha-p+2}\varphi, \tag{2.23}$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, passando ao limite na expressão acima, usando os mesmos argumentos feitos na Afirmação 2.1 e as convergências em (2.19), (2.21) e (2.22) obtemos

$$[M(t_0)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi = \int_\Omega \frac{h(x)\varphi}{u^{\gamma-p+2}} + \int_\Omega u^{\alpha-p+2}\varphi, \text{ para toda } \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.24}$$

Usando $u$ como função teste na expressão acima,

$$[M(t_0)]^{p-1}||u||_{1,p}^p = \int_\Omega h(x)u^{p-\gamma-1} + \int_\Omega u^{\alpha-p+3}. \tag{2.25}$$

Fazendo $\varphi = u_n$ na expressão (2.23), segue-se que

$$[M(||u_n||_{1,p}^p)]^{p-1}||u_n||_{1,p}^p = \int_\Omega \frac{h(x)u_n}{(1/n+u_n)^{\gamma-p+2}} + \int_\Omega u_n^{\alpha-p+3}. \tag{2.26}$$

Notando que $u_n \to u$ em $L^q(\Omega),\ 1 \leq q < p^*$, $\Omega$ é um domínio limitado e que $1 < 1/(p-\gamma-1)$, tem-se $L^{1/(p-\gamma-1)}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ e assim

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^{1/(p-\gamma-1)}(\Omega).$$

Portanto,

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^{1/(p-\gamma-1)}(\Omega).$$

Daí

$$u_n(x) \to u(x) \quad q.s \quad \text{em} \quad \Omega$$

e existe $\omega \in L^{1/(p-\gamma-1)}(\Omega)$ tal que

$$u_n(x) \leq \omega(x) \quad q.s. \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\left|\frac{h(x)u_n}{(1/n+u_n)^{\gamma-p+2}}\right| \leq ||h||_\infty \frac{|u_n|}{|u_n|^{\gamma-p+2}} \leq ||h||_\infty u_n^{p-\gamma-1} \leq C\omega^{p-\gamma-1} \in L^1(\Omega)$$

e

$$\frac{h(x)u_n(x)}{(1/n+u_n(x))^{\gamma-p+2}} \to \frac{h(x)u(x)}{u(x)^{\gamma-p+2}}.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega \frac{h(x)u_n}{1/n+u_n)^{\gamma-p+2}} \to \int_\Omega \frac{h(x)u}{u^{\gamma-p+2}} \tag{2.27}$$

e como $1 < \alpha - p + 3 < 2$, segue-se

$$\int_\Omega u_n^{\alpha-p+3} \to \int_\Omega u^{\alpha-p+3} \tag{2.28}$$

Logo, passando ao limite em (2.26), usando (2.19), (2.27) e (2.28), obtemos

$$[M(t_0)]^{p-1}t_0 = \int_\Omega \frac{h(x)u}{u^{\gamma-p+2}} + \int_\Omega u^{\alpha-p+3},$$

ou seja,

$$[M(t_0)]^{p-1}t_0 = \int_\Omega h(x)u^{p-\gamma-1} + \int_\Omega u^{\alpha-p+3}. \tag{2.29}$$

Comparando (2.25), (2.29) e usando $[M(t_0)]^{p-1} > 0$, temos $||u||^p_{1,p} = t_0$. Assim, de (2.24)

$$[M(||u||^p_{1,p})]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi = \int_\Omega \frac{h(x)\varphi}{u^{\gamma-p+2}} + \int_\Omega u^{\alpha-p+2}\varphi, \text{ para toda } \varphi \in W^{1,p}_0(\Omega)$$

mostrando que $u$ é solução fraca de (2.1). ∎

## 2.2 Problema Singular via Sub e Supersolução

Consideremos o seguinte problema não-local com termo singular

$$\begin{cases} -[M(\|u\|^p_{1,p})]^{p-1}\Delta_p u = a(x)u^{-\gamma} + \lambda f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.30}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e regular, $N \geq 1$, $1 < p < N$, $a \geq 0$ é uma função mensurável não trivial, $\gamma > 0$ é uma constante, $\lambda > 0$ um parâmetro, $f$ é uma função de Carathéodory satisfazendo:

$(f_1)$ $\sup_{(x,t)\in\Omega\times[0,T)} |f(x,t)| < \infty$, para todo $T > 0$.

$M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que

$(M_0)$ Existe $m_0 > 0$ tal que $M(t) \geq m_0 > 0$, para todo $t \geq 0$.

Denotaremos por $C^1_0(\overline{\Omega})$ o espaço $\{u \in C^1(\overline{\Omega}); u(x) = 0, \text{ para todo } x \in \partial\Omega\}$ e admitiremos,

$(H_1)$ Existe $\varphi > 0$ em $C^1_0(\overline{\Omega})$ e $q > N$, tal que $a\varphi^{-\gamma} \in L^q(\Omega)$.

O caso local com $p = 2$, $\gamma < 1$ e $f = 0$ foi bastante estudado, em domínios limitados e ilimitados, em diversos artigos, entre eles podemos citar [28], [29], [31], [39], [40], [41], [51] e suas referências. Particularmente, Lair e Shaker [40] mostraram a existência e unicidade de solução fraca quando $\Omega$ é limitado e $a \in L^2(\Omega)$. O resultado deles foi estendido para o caso sublinear $f(t) = t^\beta$, $0 < \beta \leq 1$ por Shi e Yao [52] e Wiegner [55] . Coclite e Palmieri [27] trabalharam no caso superlinear $1 < \beta < 2^* - 1$ com $\lambda$ pequeno e obtiveram uma solução quando $a = 1$. Para funções $a$ mais gerais, Sun, Wu e Long [53] mostraram a existência de duas soluções usando o Princípio Variacional de Ekeland e Zhang [56] estendeu esses resultados de multiplicidade para termos superlineares mais gerais $f(t) \geq 0$ usando teoria de pontos críticos sobre conjuntos convexos e fechados. O caso local com $p$ mais geral foi estudado por Perera e Zhang [50], Perera e Silva [48] e para uma classe de sistema singular podemos citar Alves e Corrêa [4] onde os autores usaram resultados devido a Rabinowitz e desigualdade do tipo Hardy-Sobolev para mostrar existência de solução.

Consideremos, inicialmente o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(x) \ \text{ em } \ \Omega, \\ \\ u = 0 \ \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.31}$$

Usaremos a seguinte proposição, cuja demonstração pode ser encontrada em [47] e [50].

**Proposição 2.2** *Se $g \in L^q(\Omega)$ para algum $q > N$, então o problema (2.31) possui uma única solução fraca $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$. Se, além disso, $g \geq 0$ é não trivial, então $u > 0$ em $\Omega$ e $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} > 0$ em $\partial\Omega$, onde $\nu$ é a normal unitária interior em $\partial\Omega$.*

Antes de demonstrarmos o resultado principal desta seção, enunciaremos e demonstraremos o seguinte lema:

**Lema 2.6** *Sejam $\phi, \omega > 0$ duas funções quaisquer em $C_0^1(\overline{\Omega})$. Se $\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} > 0$ em $\partial\Omega$, onde $\nu$ é a normal unitária interior em $\partial\Omega$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\frac{\phi(x)}{\omega(x)} \geq C > 0, \quad \textit{para} \ \ \textit{todo} \ \ x \in \Omega.$$

**Demonstração:**

De fato, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, definamos o seguinte conjunto

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega; dist(x, \partial\Omega) < \delta\}.$$

Como $\phi, \omega > 0$ em $\Omega$ e desde que $\Omega \backslash \Omega_\delta$ é compacto, existe $m_1 > 0$ tal que

$$\frac{\phi(x)}{\omega(x)} \geq m_1, \text{ para todo } x \in \Omega \backslash \Omega_\delta. \tag{2.32}$$

Sendo $\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} > 0$ em $\partial\Omega$, tem-se $\dfrac{\partial \phi}{\partial \eta} < 0$, onde $\eta$ denota o vetor normal exterior e como $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, então $\partial\Omega$ é um conjunto compacto e assim existe $C_1 < 0$ satisfazendo

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial \eta} \leq C_1, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}_\delta.$$

Desde que $\omega \in C_0^1(\overline{\Omega})$, existe $C_2 > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial \omega(x)}{\partial \eta}\right| \leq C_2, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega_\delta}.$$

Consideremos $K_0 = \inf_{\overline{\Omega_\delta}} \dfrac{\partial \omega}{\partial \eta} < 0$ e definamos a seguinte função

$$H(x) = \alpha\omega(x) - \phi(x), \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}_\delta$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ a ser escolhido.

Assim,

$$\frac{\partial H(x)}{\partial \eta} = \alpha \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \geq \alpha K_0 - C_1 > 0, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}_\delta,$$

desde $0 < \alpha < \dfrac{C_1}{K_0}$.

Fixemos $x \in \overline{\Omega}_\delta$ e consideremos a função

$$f(s) = H(x + s\eta), \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Para cada $x \in \overline{\Omega}_\delta$ escolha um único $\widetilde{x} \in \overline{\Omega}_\delta$ de modo que a reta que passa por esses dois pontos coincida com a reta suporte do vetor normal exterior $\eta = \eta(\widetilde{x})$. Logo, existe $\widehat{s} > 0$ tal que

$$x + \widehat{s}\eta = \widetilde{x} \in \partial\Omega.$$

Desde que $H(\partial\Omega) \equiv 0$, segue-se

$$f(\widehat{s}) = H(x + \widehat{s}\eta) = 0.$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio, existe $\xi \in (0, \widehat{s})$ tal que

$$f(\widehat{s}) - f(0) = f'(\xi)(\widehat{s} - 0),$$

ou seja,

$$-H(x) = \frac{\partial H}{\partial \eta}(x + \xi\eta)\widehat{s} > 0 \text{ em } \overline{\Omega}_\delta.$$

Portanto, $H(x) \leq 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}_\delta$, isto é,

$$\alpha\omega(x) - \phi(x) \leq 0, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}_\delta.$$

Logo,

$$\alpha\omega \leq \phi(x), \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}_\delta$$

e assim

$$\frac{\phi(x)}{\omega(x)} \geq \alpha > 0, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}_\delta. \tag{2.33}$$

Segue de (2.32) e (2.33), que existe $C > 0$ de forma que

$$\frac{\phi(x)}{\omega(x)} \geq C, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Demonstrando assim o lema. ∎

**Teorema 2.2** *Suponhamos que as condições $(f_1)$,$(M_0)$ e $(H_1)$ sejam satisfeitas e que $f \geq 0$, então existe $\lambda_0 > 0$ tal que o problema (2.30) possui uma solução para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$.*

**Demonstração:** Por $(H_1)$ existe $\varphi > 0$ em $C_0^1(\overline{\Omega})$ e $q > N$ tal que $a\varphi^{-\gamma} \in L^q(\Omega)$. Assim

$$\int_\Omega |a|^q = \int_\Omega |a\varphi^{-\gamma}\varphi^{\gamma}|^q = \int_\Omega |a\varphi^{-\gamma}||\varphi^{\gamma}| \leq k \int_\Omega |a\varphi^{-\gamma}|^q < \infty.$$

Daí, $a \in L^q(\Omega)$ e o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p v = a(x) \;\text{ em }\; \Omega, \\ \\ \quad v = 0 \;\text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.34}$$

possui uma única solução positiva $v \in C_0^1(\overline{\Omega})$, devido à Proposição 2.2.

Notemos que $av^{-\gamma} \in L^q(\Omega)$. De fato, do Lema 2.6, existe $C > 0$ tal que

$$\frac{v(x)}{\varphi(x)} \geq C > 0, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

De onde segue

$$\frac{v(x)^{-\gamma}}{\varphi(x)^{-\gamma}} \leq \widetilde{C}, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Logo,

$$\int_\Omega |av^{-\gamma}|^q = \int_\Omega \left| a\frac{v^{-\gamma}}{\varphi^{-\gamma}}\varphi^{-\gamma}\right|^q = \int_\Omega |a\varphi^{-\gamma}|^q \left|\frac{v^{-\gamma}}{\varphi^{-\gamma}}\right|^q \leq \widetilde{C}\int_\Omega |a\varphi^{-\gamma}|^q < \infty.$$

Portanto, $av^{-\gamma} \in L^q(\Omega)$.

Fixemos $0 < \epsilon < 1$, suficientemente pequeno tal que $\underline{u} := \epsilon^{1/p-1}v \leq 1$. Assim,

$$\begin{aligned} &-[M(\|\underline{u}\|_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p\underline{u} - a(x)\underline{u}^{-\gamma} - \lambda f(x,\underline{u}) = -[M(\|\underline{u}\|_{1,p}^p)]^{p-1}\epsilon\Delta_p v \\ &-a(x)(\epsilon^{1/p-1}v)^{-\gamma} - \lambda f(x, \epsilon^{1/p-1}v) \end{aligned}$$

Como $\epsilon^{1/p-1}v \leq 1$, segue-se que $(\epsilon^{1/p-1}v)^{-\gamma} \geq 1$, e daí $-a(x)(\epsilon^{1/p-1}v)^{-\gamma} \leq -a(x)$.

Além disso, sendo $f \geq 0$ e $[M(\|\underline{u}\|_{1,p}^p)]^{p-1} \geq m_0$, segue-se que $-[M(\|\underline{u}\|_{1,p}^p)]^{p-1} \leq -m_0$. Logo,

$$\begin{aligned} -[M(\|\underline{u}\|_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p\underline{u} - a(x)\underline{u}^{-\gamma} - \lambda f(x,\underline{u}) &\leq -m_0^{p-1}\epsilon\Delta_p v - a(x) \\ &= m_0^{p-1}\epsilon a(x) - a(x) \\ &= -(1 - m_0^{p-1}\epsilon)a(x). \end{aligned}$$

Tome $0 < \epsilon < 1$ suficientemente pequeno, tal que $1 - m_0^{p-1}\epsilon > 0$. Assim, $\underline{u}$ é uma subsolução de (2.30).

Note agora que

$$\int_\Omega |a\underline{u}^{-\gamma}|^q = \int_\Omega |a(\epsilon^{1/p-1}v)^{-\gamma}|^q \leq C_\epsilon \int_\Omega |av^{-\gamma}|^q < \infty.$$

Daí $a\underline{u}^{-\gamma} \in L^q(\Omega)$ e assim o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = a(x)\underline{u}^{-\gamma} + 1 \text{ em } \Omega, \\ \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.35}$$

possui uma única solução positiva $\overline{u} \in C_0^1(\overline{\Omega})$, devido à Proposição 2.2.

**Afirmação 2.2** $\overline{u} \geq \underline{u}$.

Com efeito, tem-se

$$-\Delta_p \overline{u} = a(x)\underline{u}^{-\gamma} + 1 \geq a(x)\underline{u}^{-\gamma} = a(x)(\epsilon^{1/p-1}v)^{-\gamma} \text{ em } \Omega$$

onde $v$ é a solução do problema (2.34) e como $(\epsilon^{1/p-1}v)^{-\gamma} \geq 1$, segue-se que

$$-\Delta_p \overline{u} \geq a(x) \geq \epsilon a(x) = \epsilon(-\Delta_p v) = -\Delta_p(\epsilon^{1/p-1}v) = -\Delta_p \underline{u} \text{ em } \Omega.$$

Assim

$$-\Delta_p \overline{u} \geq -\Delta_p \underline{u}$$

e pelo Princípio de Comparação temos que $\overline{u} \geq \underline{u}$ em $\Omega$.

Mostraremos agora que $\overline{u}$ é supersolução de (2.30).
De fato, sendo $\overline{u}$ solução de (2.35), temos

$$-\Delta_p \overline{u} = a(x)\underline{u}^{-\gamma} + 1.$$

Desta última igualdade e de $(M_0)$, obtemos

$$\begin{aligned} - &\quad [M(\|\overline{u}\|_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p \overline{u} - a(x)\overline{u}^{-\gamma} - \lambda f(x,\overline{u}) \\ = &\quad [M(\|\overline{u}\|_{1,p}^p)]^{p-1}(a(x)\underline{u}^{-\gamma} + 1) - a(x)\overline{u}^{-\gamma} - \lambda f(x,\overline{u}) \\ \geq &\quad m_0^{p-1}(a(x)\underline{u}^{-\gamma} + 1) - a(x)\overline{u}^{-\gamma} - \lambda f(x,\overline{u}) \\ = &\quad m_0^{p-1}a(x)\underline{u}^{-\gamma} + m_0^{p-1} - a(x)\overline{u}^{-\gamma} - \lambda f(x,\overline{u}) \\ = &\quad a(x)(m_0^{p-1}\underline{u}^{-\gamma} - \overline{u}^{-\gamma}) + m_0^{p-1} - \lambda f(x,\overline{u}). \end{aligned}$$

**Afirmação 2.3** $m_0^{p-1}\underline{u}^{-\gamma} - \overline{u}^{-\gamma} \geq 0$.

Inicialmente observamos que

$$
\begin{aligned}
m_0^{p-1}\underline{u}^{-\gamma} - \overline{u}^{-\gamma} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad m_0^{p-1}\underline{u}^{-\gamma} \geq \overline{u}^{-\gamma} \\
&\Leftrightarrow \quad m_0^{p-1}\overline{u}^{\gamma} \geq \underline{u}^{\gamma} \\
&\Leftrightarrow \quad m_0^{p-1} \geq \left(\frac{\epsilon^{1/p-1}v}{\overline{u}}\right)^{\gamma}.
\end{aligned}
$$

Argumentando como no Lema 2.6, existe $C > 0$ tal que $\dfrac{\overline{u}(x)}{v(x)} \geq C$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Assim,

$$\frac{v(x)}{\overline{u}(x)} \leq C_1, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}$$

implicando em

$$\frac{\epsilon^{1/p-1}v(x)}{\overline{u}(x)} \leq \epsilon^{1/p-1}C_1, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Para $0 < \epsilon < 1$ suficientemente pequeno

$$\frac{\epsilon^{1/p-1}v(x)}{\overline{u}} \leq \epsilon^{1/p-1}C_1 \leq m_0^{p-1}, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

De onde seque que $m_0^{p-1}\underline{u}^{-\gamma} - \overline{u}^{-\gamma} \geq 0$.

Portanto,

$$-[M(\|\overline{u}\|^p)]^{p-1}\Delta_p\overline{u} - a(x)\overline{u}^{-\gamma} - \lambda f(x,\overline{u}) \geq m_0^{p-1} - \lambda f(x,\overline{u})$$

e por $(f_1)$ segue-se

$$-[M(\|\overline{u}\|^p)]^{p-1}\Delta_p\overline{u} - a(x)\overline{u}^{-\gamma} - \lambda f(x,\overline{u}) \geq m_0^{p-1} - \lambda \sup_{x\in\Omega, t\leq \max \overline{u}} f(x,t).$$

Tomando $\lambda_0 = \dfrac{m_0^{p-1}}{k}$, onde $k = \sup\limits_{x\in\Omega, t\leq \max \overline{u}} f(x,t)$, temos que $\overline{u}$ é uma supersolução de (2.30), para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

Consideremos a função $g_\lambda$ definida por

$$g_\lambda(x,t) = \begin{cases} a(x)\overline{u}(x)^{-\gamma} + \lambda f(x,\overline{u}), & t > \overline{u}(x) \\ a(x)t^{-\gamma} + \lambda f(x,t), & \underline{u}(x) \leq t \leq \overline{u} \\ a(x)\underline{u}(x)^{-\gamma} + \lambda f(x,\underline{u}), & \underline{u}(x) > t \end{cases}$$

e sua primitiva

$$G_\lambda(x,t) = \int_0^t g_\lambda(x,s)ds.$$

Definamos o funcional $\Phi_\lambda : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi_\lambda(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|_{1,p}^p) - p\int_\Omega G_\lambda(x,u)$$

onde $\widehat{M}(t) = \displaystyle\int_0^t [M(s)]^{p-1} ds$.

Note que:

- Se $t < \underline{u}(x)$, então

$$0 \le g_\lambda(x,t) = a(x)\underline{u}(x)^{-\gamma} + \lambda f(x,\underline{u}(x)) \le a(x)\underline{u}(x)^{-\gamma} + \lambda \sup_{x\in\Omega, t\le \max \underline{u}} f(x,t)$$

- Se $\underline{u}(x) \le t \le \overline{u}(x)$, então

$$0 \le g_\lambda(x,t) \quad = \quad a(x)t^{-\gamma} + \lambda f(x,t) \le a(x)\underline{u}(x)^{-\gamma} + \lambda \sup_{x\in\Omega, t\le \max \underline{u}} f(x,t)$$

- Se $t > \overline{u}(x)$, então

$$0 \le g_\lambda(x,t) \quad = \quad a(x)\overline{u}(x)^{-\gamma} + \lambda f(x,\overline{u}) \le a(x)\underline{u}(x)^{-\gamma} + \lambda \sup_{x\in\Omega, t\le \max \underline{u}} f(x,t).$$

Logo,

$$0 \le g_\lambda(x,t) \le a(x)\underline{u}(x)^{-\gamma} + \lambda \sup_{x\in\Omega, t\le \max \underline{u}} f(x,t).$$

Consideremos o conjunto

$$V = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega); \underline{u} \le u \le \overline{u} \;\; q.s \text{ em } \Omega\}.$$

Mostraremos que, para todo $u \in V$ que $\Phi_\lambda(u)$ é limitada inferiormente em $V$.

De fato, para $u \in V$ tem-se

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|_{1,p}^p) - p\int_\Omega G_\lambda(x,u) \\
&\ge \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|_{1,p}^p) - p\int_\Omega \left[\int_0^u a(x)\underline{u}(x)^{-\gamma} + \lambda \sup_{(x,t)\in\Omega\times[0,T)} f(x,t)\right] \\
&= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|_{1,p}^p) - p\int_\Omega u\Bigg(a(x)\underline{u}(x)^{-\gamma} + \lambda \sup_{(x,t)\in\Omega\times[0,T)} f(x,t)\Bigg).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\Phi_\lambda(u) \quad \ge \quad \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|_{1,p}^p) - p\int_\Omega \overline{u}\Bigg(a(x)\underline{u}(x)^{-\gamma} + \lambda \sup_{(x,t)\in\Omega\times[0,T)} f(x,t)\Bigg).$$

Sendo $\overline{u} \in C_0^1(\Omega)$

$$\Phi_\lambda(u) \quad \ge \quad \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|_{1,p}^p) - p|\overline{u}|_\infty \left[\int_\Omega a(x)\underline{u}(x)^{-\gamma} - \widetilde{K}\right]$$

onde $\widetilde{K} = p|\overline{u}|_\infty \displaystyle\int_\Omega \lambda \sup_{(x,t)\in\Omega\times[0,T)} f(x,t))$.

Agora, como $a\underline{u}^{-\gamma} \in L^q(\Omega,)$ temos

$$\Phi_\lambda(u) \geq \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|_{1,p}^p) - C|a\underline{u}^{-\gamma}|_q - \widetilde{K}.$$

Usando $(M_0)$, segue-se que

$$\Phi_\lambda(u) \geq \frac{1}{p}m_0^{p-1}\|u\|_{1,p}^p - \overline{C}$$

fazendo $\|u\|_{1,p} \to \infty$, temos que $\Phi_\lambda(u) \to \infty$, assim $\Phi_\lambda$ é coerciva, logo limitada inferiormente sobre $V$.

Além disso, como $V$ é fechado e convexo, $\Phi_\lambda$ é contínuo, concluímos que $\Phi_\lambda$ atinge um mínimo em $V$, isto é, existe $u_0 \in V$ é solução fraca de (2.30). ■

# Capítulo 3

# Problemas Não-Locais Com Condição de Fronteira de Neumann

## 3.1 Um Resultado de Existência

O recente progresso no estudo de problemas com condição de fronteira de Neumann tem atraído menos atenção por parte dos pesquisadores em relação ao problema de Dirichlet. Uma explicação para isso, talvez seja o fato que qualquer solução para o problema de Neumann é instável quando vista como uma solução da equação parabólica correspondente. Em particular, para problemas não-locais essa atenção, quando tratamos com condição de Neumann, é ainda menor.

Nesta seção mostraremos um resultado de existência de solução fraca para a seguinte classe de problemas não-locais

$$\begin{cases} -\left[M_1\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p\right)\right]^{p-1}\Delta_p u = f(u,v) + \rho_1(x) \ \text{ em } \ \Omega, \\ -\left[M_2\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^p\right)\right]^{p-1}\Delta_p v = g(u,v) + \rho_2(x) \ \text{ em } \ \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 1)$ é um domínio limitado e regular $f, g : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $M_1, M_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas satisfazendo as seguintes hipóteses:

$(fg)$ Existe uma função $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $C^1$, tal que

$$f(u,v) = F_u(u,v) \;\; \text{e} \;\; g(u,v) = F_v(u,v), \;\text{para todo}\; (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

$(F_1)$ Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(s+k, t+k) = F(s,t), \;\text{para todos}\; s,t \in \mathbb{R}.$$

(M) Existe $m_0 > 0$ tal que

$$M_1(t), M_2(t) \geq m_0, \;\text{para todo}\; t \geq 0.$$

(C) As funções $\rho_1, \rho_2 \in L^q(\Omega)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e

$$\int_\Omega \rho_1 = \int_\Omega \rho_2 = 0.$$

Como dissemos na introdução deste trabalho, o problema (3.1) foi inspirado em um estudo feito em [26] onde foi dado um princípio de minimização, cuja grande utilidade é a situação onde o funcional associado ao problema não é coercivo. Como aplicação, o autor mostrou a existência de solução para o problema (15) usando técnica de minimização para um funcional não-coercivo.

Devido estarmos estudando um problema de Neumann, trabalharemos no espaço $W^{1,p}(\Omega)$ o qual será decomposto da seguinte maneira: Como toda função constante pertence a $W^{1,p}(\Omega)$, designaremos por $X_1 =< 1 >$ o espaço de tais funções, o qual pode ser identificado com $\mathbb{R}$. Designaremos por $X_0$ o espaço das funções em $W^{1,p}(\Omega)$ que possuem média zero em $\Omega$, ou seja,

$$X_0 = \{w \in W^{1,p}(\Omega); \int_\Omega w = 0\}.$$

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$, seja $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ dada por

$$u_0 := u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u$$

e observe que $\dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega u$ é uma constante real. Logo,

$$\int_\Omega u_0 = \int_\Omega u - \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\right)|\Omega| = 0$$

e assim, toda função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ pode ser escrita na forma

$$u = \alpha + u_0$$

em que $\alpha$ é uma constante real e $u_0$ possui média zero.

Observemos que tal decomposição é única. De fato, se $u = \alpha + u_0 = \widetilde{\alpha} + \widetilde{u_0}$, $\alpha$, $\widetilde{\alpha}$, $u_0$ e $\widetilde{u_0}$ como antes, teremos

$$\alpha - \widetilde{\alpha} = \widetilde{u_0} - u_0$$

e integrando ambos os membros desta igualdade

$$(\alpha - \widetilde{\alpha})|\Omega| = 0 \Rightarrow \alpha = \widetilde{\alpha}$$

e daí $u_0 = \widetilde{u_0}$ o que mostra ser única tal decomposição.

Conseqüentemente, temos a seguinte decomposição em soma direta

$$W^{1,p}(\Omega) = X_0 \oplus X_1.$$

Neste capítulo consideraremos os seguintes espaços de Banach

$$X = W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$$

e

$$Y = L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$$

equipados, respectivamente, com as normas

$$\begin{aligned} \|(u,v)\|_X &= \left( \int_\Omega (|\nabla u|^p + |\nabla v|^p) + \int_\Omega (|u|^p + |v|^p) \right)^{1/p} = \Big( \|u\|^p + \|v\|^p \Big)^{1/p} \\ |(u,v)|_Y &= \left( \int_\Omega (|u|^p + |v|^p) \right)^{1/p} = \Big( |u|_p^p + |v|_p^p \Big)^{1/p} \end{aligned}$$

onde $\|.\|$ denota a norma usual em $W^{1,p}(\Omega)$ e $|.|_p$ é a norma em $L^p(\Omega)$ dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \|u\|^p &= \int_\Omega |\nabla u|^p + \int_\Omega |u|^p, \\ |u|_p^p &= \int_\Omega |u|^p. \end{aligned}$$

Antes de demonstramos o resultado principal desta seção, provaremos que uma Desigualdade do tipo Poincaré é valida para funções em $X_0$.

**Lema 3.1** *( **Desigualdade de Poincaré** ) Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_\Omega |w|^p \leq C \int_\Omega |\nabla w|^p, \ \textit{para todo } w \in X_0.$$

**Demonstração :** Seja $\psi : X_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcional

$$\begin{array}{rcl} \psi : V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ w & \longmapsto & \psi(w) = \displaystyle\int_\Omega |\nabla w|^p, \text{ para todo } w \in X_0, \end{array}$$

e $S$ a variedade

$$S = \{w \in X_0; \int_\Omega |w|^p = 1\}.$$

Desde que $\psi$ é limitado inferiormente em $S$, existe uma seqüência minimizante $(w_n) \subset S$, isto é,

$$\psi(w_n) \to \inf_S \psi = \psi_\infty.$$

Conseqüentemente, $\displaystyle\int_\Omega |w_n|^p = 1$ e existe uma constante positiva $C_1$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^p \leq C_1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Desses fatos, segue-se que a seqüência $(w_n)$ é limitada em $W^{1,p}(\Omega)$ e, em vista disso, a seqüência real $(\|w_n\|^p)$ possui uma subseqüência convergente. Além disso, a menos de subseqüência

$$\begin{array}{rcl} w_n & \rightharpoonup & w_0 \text{ em } W^{1,p}(\Omega), \\ w_n & \to & w_0 \text{ em } L^r(\Omega), \ 1 \leq r < p^*. \end{array}$$

Em particular,

$$0 = \int_\Omega w_n \to \int_\Omega w_0$$

e

$$1 = \int_\Omega |w_n|^p \to \int_\Omega |w_0|^p.$$

Conseqüentemente, $w_0 \in S$.

Mostraremos que $\psi_\infty > 0$. De fato, suponhamos, por contradição, que $\psi_\infty = 0$. Nesse caso, a menos de subseqüência, usando o fato de que o funcional

$$\begin{array}{rcl} f : W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f(w) & \longmapsto & f(u) = \|w\|^p \end{array}$$

é convexo e semicontínuo inferiormente e $w_n \rightharpoonup w_0$ em $W^{1,p})(\Omega)$ segue-se

$$\begin{array}{rcl} 0 = \lim \displaystyle\int_\Omega |\nabla w_n|^p & = & \lim \left( \displaystyle\int_\Omega |\nabla w_n|^p + \int_\Omega |w_n|^p - \int_\Omega |w_n|^p \right) \\ & = & \lim(\|w_n\|^p - |w_n|_p^p) \\ & = & \lim \|w_n\|^p - \lim |w_n|_p^p \\ & \geq & \|w_0\|^p - |w_0|_p^p = \displaystyle\int_\Omega |\nabla w_0|^p, \end{array}$$

isto é,

$$\int_\Omega |\nabla w_0|^p = 0,$$

o que implica

$$w_0(x) = C_2 \ q.s \text{ em } \Omega,$$

onde $C_2$ é uma constante real.

Devido $w_0 \in S \subset X_0$ temos

$$\int_\Omega w_0 = \int_\Omega C_2 = 0$$

e concluímos assim que $C_2 = 0$, o que é impossível devido a $\displaystyle\int_\Omega |w_0|^p = 1$. Portanto, $\psi_\infty > 0$.

Como

$$\psi_\infty \leq \int_\Omega |\nabla w|^p, \text{ para todo } w \in S \text{ com } |w|_p = 1,$$

tomando-se $0 \neq w \in X_0$, observando que $\left|\dfrac{w}{|w|_p}\right| = 1$, segue-se

$$\psi_\infty \leq \int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{w}{|w|_p}\right)\right|^p = \frac{1}{|w|_p^p}\int_\Omega |\nabla w|^p$$

e isso implica em

$$|w|_p^p \leq \frac{1}{\psi_\infty}\int_\Omega |\nabla w|^p, \text{ para todo } w \in X_0$$

mostrando a Desigualdade de Poincaré para funções de $X_0$. ■

Associado ao problema (3.1) temos o funcional $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$I(u,v) = \frac{1}{p}\widehat{M_1}\Big(\int_\Omega |\nabla u|^p\Big) + \frac{1}{p}\widehat{M_2}\Big(\int_\Omega |\nabla v|^p\Big) - \int_\Omega F(u,v) - \int_\Omega \rho_1 u - \int_\Omega \rho_2 v,$$

para todo $(u,v) \in X$, em que

$$\widehat{M_i}(t) = \int_\Omega [M_i(s)]^{p-1} ds, \quad i = 1,2.$$

Observemos que $I \in C^1(X;\mathbb{R})$ e

$$\begin{aligned} I'(u,v)(\varphi,\psi) &= \Big[M_1\Big(\int_\Omega |\nabla u|^p\Big)\Big]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi \\ &+ \Big[M_2\Big(\int_\Omega |\nabla v|^p\Big)\Big]^{p-1}\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla \psi \\ &- \int_\Omega f(u,v)\varphi - \int_\Omega g(u,v)\psi - \int_\Omega \rho_1\varphi - \int_\Omega \rho_2\psi, \end{aligned}$$

para todo $(\varphi,\psi) \in X$.

Mostraremos o seguinte resultado.

**Proposição 3.1** *O funcional $I$ está bem definido e é limitado inferiormente.*

**Demonstração :** Mostraremos que $I$ está bem definido. Para isso, é suficiente mostrar que o funcional

$$\begin{array}{rcl} J : X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & J(u,v) = \displaystyle\int_\Omega F(u,v) \end{array}$$

está bem definido, haja vista que as outras parcelas que compõem $I$ estão, obviamente, bem definidas.

Como $F$ é contínua em $[0,k] \times [0,k]$, existe $C > 0$ tal que

$$|F(s,t)| \leq C, \text{ para todo } (s,t) \in [0,k] \times [0,k]$$

e desde que $F(s+k, t+k) = F(s,t)$, tem-se

$$|J(u,v)| = \left| \int_\Omega F(u,v) \right| \leq \int_\Omega |F(u,v)| \leq C|\Omega| < \infty.$$

Isto mostra que $J$ está bem definido.

Demonstraremos, a seguir, que $I$ é limitado inferiormente. Para isso, recordemos que

$$W^{1,p}(\Omega) = X_0 \oplus X_1,$$

como foi observado anteriormente. Assim, se $(u,v) \in X$, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u_0, v_0 \in X_0$ tais que

$$u = u_0 + \alpha \;\text{ e }\; v = v_0 + \beta.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I(u,v) = I(u_0+\alpha, v_0+\beta) &= \frac{1}{p}\widehat{M_1}\Big(\int_\Omega |\nabla u|^p\Big) + \frac{1}{p}\widehat{M_2}\Big(\int_\Omega |\nabla v|^p\Big) \\ &- \int_\Omega F(u_0+\alpha, v_0+\beta) - \int_\Omega \rho_1(u_o+\alpha) \\ &- \int_\Omega \rho_2(v_0+\beta) \\ &\geq \frac{1}{p}\widehat{M_1}\Big(\int_\Omega |\nabla u|^p\Big) + \frac{1}{p}\widehat{M_2}\Big(\int_\Omega |\nabla v|^p\Big) - C|\Omega| \\ &- \int_\Omega \rho_1(u_0+\alpha) - \int_\Omega \rho_2(v_0+\beta) \end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned} I(u,v) &\geq \frac{1}{p}\widehat{M_1}\Big(\int_\Omega |\nabla u|^p\Big) + \frac{1}{p}\widehat{M_2}\Big(\int_\Omega |\nabla v|^p\Big) - C|\Omega| - \int_\Omega \rho_1 u_0 \\ &- \alpha\int_\Omega \rho_1 - \int_\Omega \rho_2 v_0 - \beta\int_\Omega \rho_2. \end{aligned}$$

Como $\rho_1, \rho_2 \in L^q(\Omega)$ e $u_0, v_0 \in L^p(\Omega)$, usamos a desigualdade de Hölder para obter

$$\begin{aligned} \int_\Omega \rho_1 u_0 &\leq \int_\Omega |\rho_1 u_0| \leq |\rho_1|_q |u_0|_p, \\ \int_\Omega \rho_2 v_0 &\leq \int_\Omega |\rho_2 v_0| \leq |\rho_2|_q |v_0|_p, \end{aligned}$$

e da condição $(C)$

$$\begin{aligned} I(u,v) &\geq \frac{1}{p}\widehat{M_1}\Big(\int_\Omega |\nabla u|^p\Big) + \frac{1}{p}\widehat{M_2}\Big(\int_\Omega |\nabla u|^p\Big) - C|\Omega| \\ &- |\rho_1|_q|u_0|_p - |\rho_2|_q|v_0|_p. \end{aligned}$$

Por $(M)$ temos

$$\begin{aligned} I(u,v) &\geq \frac{1}{p}m_0^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^p - \frac{1}{p}m_0^{p-1}\int_\Omega |\nabla v|^p - C|\Omega| \\ &- |\rho_1|_q|u_0|_p - |\rho_2|_q|v_0|_p. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré para $u_0$ e $v_0$

$$\begin{aligned} I(u,v) &\geq \frac{1}{p}m_0^{p-1}\Big(\int_\Omega |\nabla u|^p + \int_\Omega |\nabla v|^p\Big) - C|\Omega| - \frac{1}{\psi_\infty}|\rho_1|_q\Big(\int_\Omega |\nabla u_0|^p\Big)^{1/p} \\ &- \frac{1}{\psi_\infty}|\rho_2|_q\Big(\int_\Omega |\nabla v_0|^p\Big)^{1/p}. \end{aligned}$$

Desde que $u = u_0 + \alpha$ e $v = v_0 + \beta$, segue-se

$$\begin{aligned} I(u,v) &\geq \frac{1}{p}m_0^{p-1}\Big(\int_\Omega |\nabla u_0|^p + \int_\Omega |\nabla v_0|^p\Big) - C|\Omega| - \frac{1}{\psi_\infty}|\rho_1|_q\Big(\int_\Omega |\nabla u_0|^p\Big)^{1/p} \\ &- \frac{1}{\psi_\infty}|\rho_2|_q\Big(\int_\Omega |\nabla v_0|^p\Big)^{1/p}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

e devido a função

$$(s,t) \longrightarrow \frac{1}{p}m_0^{p-1}(s+t) - \frac{1}{\psi_\infty}|\rho_1|_q s^{1/p} - \frac{1}{\psi_\infty}|\rho_2|_q t^{1/p},\ s,t \geq 0$$

ser limitada inferiormente. concluímos que $I$ é limitada inferiormente. ■

Antes de enunciar o resultado principal desta seção, lembremos que $(u,v) \in X$ é uma solução fraca do problema (3.1) se

$$\left[M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)\right]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi = \int_\Omega [f(u,v)+\rho_1]\varphi$$

e

$$\left[M_2\left(\int_\Omega |\nabla v|^p\right)\right]^{p-1}\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\psi = \int_\Omega [g(u,v)+\rho_2]\psi$$

para todas $\varphi, \psi \in W^{1,p}(\Omega)$.

**Teorema 3.1** *Suponhamos que sejam válidas as condições* $(fg)$, $(F_1)$, $(M)$ *e* $(C)$. *Então o problema (3.1) possui uma solução fraca* $(u,v) \in X$.

**Demonstração :** Encontraremos um ponto crítico do funcional

$$I(u,v) = \frac{1}{p}\widehat{M_1}\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right) + \frac{1}{p}\widehat{M_2}\left(\int_\Omega |\nabla v|^p\right) - \int_\Omega F(u,v) - \int_\Omega \rho_1 u - \int_\Omega \rho_2 v.$$

Como $I \in C^1(X;\mathbb{R})$ é limitado inferiormente, do Princípio Variacional de Ekeland, existe $(u_n, v_n) \in X$ tal que

$$\begin{aligned} I(u_n,v_n) &\rightarrow \inf_X I(u,v) \\ I'(u_n,v_n) &\rightarrow 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Observermos que $u_n$ e $v_n$ podem ser escritas como

$$u_n = u_n^0 + \alpha_n \text{ e } v_n = v_n^0 + \beta_n$$

em que $\displaystyle\int_\Omega u_n^0 = \int_\Omega v_n^0 = 0$ e em virtude de $F(s+k, t+k) = F(s,t)$ podemos supor $0 \leq \alpha_n \leq k$ e $0 \leq \beta_n \leq k$.

De (3.3), existe $C_3 > 0$ tal que

$$|I(u_n,v_n)| \leq C_3 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

e de (3.2) obtemos

$$\begin{aligned} C_3 \ &\geq \ \frac{1}{p}m_0^{p-1}\left(\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p + \int_\Omega |\nabla v_n^0|^p\right) - C|\Omega| - \frac{1}{\psi_\infty}|\rho_1|_q\left(\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p\right)^{1/p} \\ &- \ \frac{1}{\psi_\infty}|\rho_2|_q\left(\int_\Omega |\nabla v_n^0|^p\right)^{1/p}, \end{aligned}$$

o que implica que as seqüências $\left( \int_\Omega |\nabla u_n^0|^p \right)$ e $\left( \int_\Omega |\nabla v_n^0|^p \right)$ são limitadas. Como $(u_n^0), (v_n^0) \subset X_0$ podemos usar a Desigualdade de Poincaré para concluir que

$$\int_\Omega |u_n^0|^p \leq k \int_\Omega |\nabla u_n^0|^p \leq k_1$$

e

$$\int_\Omega |v_n^0|^p \leq \widetilde{k} \int_\Omega |\nabla v_n^0|^p \leq k_2,$$

ou seja, $(u_n^0)$ e $(v_n^0)$ são seqüências limitadas em $W^{1,p}(\Omega)$. Recordando que $0 \leq \alpha_n \leq k$, $0 \leq \beta_n \leq k$, concluímos que $(u_n)$ e $(v_n)$ são limitadas em $W^{1,p}(\Omega)$. Pela reflexividade de $W^{1,p}(\Omega)$ temos, a menos de subseqüência,

$$\begin{aligned}
u_n &\rightharpoonup u_0 \text{ em } W^{1,p}(\Omega),\\
v_n &\rightharpoonup v_0 \text{ em } W^{1,p}(\Omega),\\
\|u_n\| &\to t_0^p,\\
\|v_n\| &\to s_0^p,\\
u_n &\to u_0 \text{ em } L^S(\Omega), 1 \leq s < p^*,\\
v_n &\to v_0 \text{ em } L^S(\Omega), 1 \leq s < p^*,\\
u_n(x) &\to u_0(x) \ q.s \text{ em } \Omega,\\
v_n(x) &\to v_0(x) \ q.s \text{ em } \Omega.
\end{aligned}$$

Daí

$$\int_\Omega \rho_1 u_n + \int_\Omega \rho_2 v_n \to \int_\Omega \rho_1 u_0 + \int_\Omega \rho_2 v_0. \tag{3.4}$$

Da continuidade de $F$

$$F(u_n(x), v_n(x)) \to F(u_0(x), v_0(x)) \ \ q.s. \ \text{ em } \ \Omega.$$

Como

$$|F(u_n(x), v_n(x))| \leq C \in L^1(\Omega),$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega F(u_n, v_n) \to \int_\Omega F(u_0, v_0). \tag{3.5}$$

Sabendo que o funcional

$$\begin{aligned} J : W^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) = \|u\|^p \end{aligned}$$

é convexo e semicontínuo inferiormente, segue-se

$$\begin{aligned} \lim \|u_n\|^p &= \underline{\lim}\|u_n\|^p \geq \|u_0\|^p \\ \lim \|v_n\|^p &= \underline{\lim}\|v_n\|^p \geq \|v_0\|^p \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \lim\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^p + \int_\Omega |u_n|^p\right) &\geq \int_\Omega |\nabla u_0|^p + \int_\Omega |u_0|^p \\ \lim\left(\int_\Omega |\nabla v_n|^p + \int_\Omega |v_n|^p\right) &\geq \int_\Omega |\nabla v_0|^p + \int_\Omega |v_0|^p. \end{aligned}$$

Observando que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p = \|u_n\|^p - \int_\Omega |u_n|^p$$
$$\int_\Omega |\nabla v_n|^p = \|v_n\|^p - \int_\Omega |v_n|^p$$

e como

$$\begin{aligned} u_n &\to u_0 \text{ em } L^p(\Omega), \\ v_n &\to v_0 \text{ em } L^p(\Omega), \end{aligned}$$

segue-se

$$\begin{aligned} \lim \int_\Omega |u_n|^p &= \int_\Omega |u_0|^p \\ \lim \int_\Omega |v_n|^p &= \int_\Omega |v_0|^p. \end{aligned}$$

Daí tem-se que $\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^p\right)$ e $\left(\int_\Omega |\nabla v_n|^p\right)$ são convergentes, logo,

$$\begin{aligned} \lim \int_\Omega |\nabla u_n|^p + \lim \int_\Omega |u_n|^p &\geq \int_\Omega |\nabla u_0|^p + \int_\Omega |u_0|^p \\ \lim \int_\Omega |\nabla v_n|^p + \lim \int_\Omega |v_n|^p &\geq \int_\Omega |\nabla v_0|^p + \int_\Omega |v_0|^p. \end{aligned}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\lim \int_\Omega |\nabla u_n|^p + \int_\Omega |u_0|^p &\geq \int_\Omega |\nabla u_0|^p + \int_\Omega |u_0|^p \\
\lim \int_\Omega |\nabla v_n|^p + \int_\Omega |v_0|^p &\geq \int_\Omega |\nabla v_0|^p + \int_\Omega |v_0|^p
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\lim \int_\Omega |\nabla u_n|^p &\geq \int_\Omega |\nabla u_0|^p \\
\lim \int_\Omega |\nabla v_n|^p &\geq \int_\Omega |\nabla v_0|^p
\end{aligned}
$$

Sendo $M_1$ e $M_2$ funções positivas, temos que $\widehat{M_1}$, $\widehat{M_2}$ são crescentes e assim

$$
\begin{aligned}
\widehat{M_1}\Big(\lim \int_\Omega |\nabla u_n|^p\Big) &\geq \widehat{M_1}\Big(\int_\Omega |\nabla u_0|^p\Big), \\
\widehat{M_2}(\lim \int_\Omega |\nabla v_n|^p) &\geq \widehat{M_2}\Big(\int_\Omega |\nabla v_0|^p\Big),
\end{aligned}
$$

e desde que $\widehat{M_1}$, $\widehat{M_2}$ são contínuas

$$
\lim \widehat{M_1}\Big(\int_\Omega |\nabla u_n|^p\Big) \geq \widehat{M_1}\Big(\int_\Omega |\nabla u_0|^p\Big) \tag{3.6}
$$

$$
\lim \widehat{M_2}\Big(\int_\Omega |\nabla v_n|^p\Big) \geq \widehat{M_2}\Big(\int_\Omega |\nabla v_0|^p\Big). \tag{3.7}
$$

Logo, de (3.4), (3.5), (3.6) e (3.7)

$$
\begin{aligned}
\inf_X I(u,v) &= \lim I(u_n, v_n) \\
&= \lim \Big[\frac{1}{p}\widehat{M_1}\Big(\int_\Omega |\nabla u_n|^p\Big) + \frac{1}{p}\widehat{M_2}\Big(\int_\Omega |\nabla v_n|^p\Big) - \int_\Omega F(u_n, v_n) \\
&- \int_\Omega \rho_1 u_n - \int_\Omega \rho_2 v_n\Big] \\
&\geq \frac{1}{p}\widehat{M_1}\Big(\int_\Omega |\nabla u_0|^p\Big) + \frac{1}{p}\widehat{M_2}\Big(\int_\Omega |\nabla v_0|^p\Big) - \int_\Omega F(u_0, v_0) \\
&- \int_\Omega \rho_1 u_0 - \int_\Omega \rho_2 v_0 \\
&= I(u_0, v_0)
\end{aligned}
$$

isto é,

$$\inf_X I(u,v) \geq I(u_0,v_0).$$

Por outro lado,

$$I(u_0,v_0) \geq \inf_X I(u,v)$$

logo

$$I(u_0,v_0) = \inf_X I(u,v)$$

segue-se então

$$I'(u_0,v_0) = 0$$

isto é, $(u_0,v_0)$ é ponto crítico de $I$ e portanto solução fraca do problema (3.1). ∎

# Capítulo 4

# Equações Elípticas do Tipo p-Kirchhoff Com Termo Não-Local Não-Crescente

## 4.1 Um Resultado de Existência

Nesta seção vamos mostrar um resultado de existência de solução não-trivial e não-negativa para o problema

$$\begin{cases} -[M(\|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) \;\; \text{em} \;\; \Omega, \\ \\ u = 0 \;\; \text{em} \; \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $1 < p < N$, $f$ é uma função superlinear com crescimento subcrítico e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma dada função.

Admitiremos que $M$ é uma função contínua satisfazendo as seguintes condições:

$(H_1)$ Existem $m_1, t_1 > 0$ tais que

$$M(t) \geq m_1 \;\; \text{se} \;\; 0 \leq t \leq t_1.$$

$(H_2)$ Existem $m_2, t_2 > 0$ tais que

$$0 < M(t) \leq m_2 \;\; \text{se} \;\; t \geq t_2.$$

$(H_3)$ $\lim\limits_{t\to\infty} [M(t^p)]^{p-1} t^{p-1} = +\infty$.

$(H_4)$ $M$ é não-crescente e $M(t) > 0$ para todo $t \geq 0$.

Observamos que a função $M(t) = \dfrac{1}{(1+t)^\alpha}$ para todo $t \geq 0$ e $0 < \alpha < \dfrac{1}{p}$ satisfaz as hipóteses acima.

Suporemos que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e satisfaz:

$(f_1)$ $f(x,t) = 0$, para todo $t \leq 0$ e para todo $x \in \Omega$.

$(f_2)$ $\displaystyle\lim_{|t|\to 0^+} \frac{f(x,t)}{|t|^{p-1}} = 0$, uniformemente em $x \in \Omega$.

$(f_3)$ $\displaystyle\lim_{|t|\to +\infty} \frac{f(x,t)}{|t|^{q-1}} = 0$, onde $p<q<p^*$, $\left(p^* = \dfrac{pN}{N-p}\right)$ uniformemente em $x \in \Omega$.

$(f_4)$ Existem $p < \mu < q$, tal que $0 < \mu F(x,t) \leq t f(x,t)$, para todo $t > 0$.

Do ponto de vista variacional problemas não-locais foram estudados em [5], [23] e [24], sempre com a hipótese $M(t) \geq m_0 > 0$, para todo $t \geq 0$, em que $m_0$ é uma constante. Considerando o caso $p = 2$, Alves, Corrêa e Ma [5] mostraram um resultado de existência usando o Teorema do Passo da Montanha associado a estimativas do tipo Gidas-Spruck, onde a não-linearidade $f$ tinha crescimento subcrítico e superlinear. Vale ressaltar que neste artigo, pelo menos ao nosso conhecimento, foi usada pela primeira vez a abordagem variacional para essa classe de problemas não-locais. Com os mesmo argumentos de [5], Corrêa e Figueiredo [23] mostraram um resultado de existência com não-linearidade $f$ tendo crescimento crítico ou supercrítico. O caso com $p$ mais geral foi estudado também por Corrêa e Figueiredo [24] e como, ao que parece, as estimativas do tipo Gidas-Spruck não são válidas para problemas envolvendo o operador p-Laplaciano, os autores usaram comparação entre os níveis de energia de certos funcionais. Como estamos trabalhando com uma classe de funções $M$ diferente dos artigos citados acima, nenhuma estimativa desse tipo foi necessária. Além disso, consideraremos $M(t) > 0$, para todo $t \geq 0$ em vez de $M(t) \geq m_0 > 0$, para todo $t \geq 0$.

Neste capítulo usaremos o Método Variacional em que soluções do problema (4.1) são pontos críticos do funcional de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, $I : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|_{1,p}^p) - \int_\Omega F(x, u^+),$$

onde

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t [M(s)]^{p-1} ds, \quad F(x,t) = \int_0^t f(x,s) ds, \quad u^+ = \max\{u, 0\}$$

e

$$I'(u)\varphi = [M(\|u\|_{1,p}^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi - \int_\Omega f(x, u^+)\varphi, \text{ para todo } \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Para demonstrarmos nosso resultado, precisaremos do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti e Rabinowitz [7].

**Teorema 4.1** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $I$ um funcional de classe $C^1(X,\mathbb{R})$. Suponhamos que $I(0)=0$ e:*

(*i*) Existem $r, \rho > 0$, tal que

$$I(u) \geq r, \quad \text{para todo} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|u\| = \rho$$

(*ii*) Existe $e \in \overline{B}_\rho^c(0)$, tal que

$$I(e) < 0$$

*Se, além disso, $I$ satisfizer a condição Palais-Smale, então $I$ possui um ponto crítico.*

Nosso principal resultado é o seguinte:

**Teorema 4.2** *Suponhamos que a função $M$ satisfaça $(H_1)-(H_4)$ e $f$ satisfaça $(f_1)-(f_4)$. Então o problema (4.1) possui uma solução não-trivial e não-negativa.*

**Demonstração :** Suponhamos que $0 < \|u\|_{1,p} = \rho < t_1$ então, por $(H_1)$

$$I(u) \geq \frac{m_1^{p-1}}{p}\|u\|_{1,p}^p - \int_\Omega F(x,u^+) \;\; \text{para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

De $(f_2)$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,t)| < \epsilon |t|^{p-1} \;\; \text{se} \;\; |t| < \delta.$$

Por $(f_3)$, dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$|f(x,t)| < \epsilon |t|^{q-1} \;\; \text{quando} \;\; |t| > R.$$

Além disso, para todo $|t| \in [\delta, R]$ e para todo $x \in \overline{\Omega}$ existe $K > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq K|t|^{q-1}$$

Portanto, combinando as três desigualdades obtidas anteriormente temos

$$|f(x,t)| < \epsilon|t|^{p-1} + C_\epsilon |t|^{q-1}, \;\; \text{para} \;\; \text{todo} \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$I(u) \geq \frac{m_1^{p-1}}{p}\|u\|_{1,p}^p - \epsilon\int_\Omega |u^+|^p - C_\epsilon \int_\Omega |u^+|^q.$$

Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno temos $\left(\dfrac{m_1^{p-1}}{p} - \epsilon C\right) > 0$, das imersões de Sobolev e desde que $|u^+| \leq |u|$ segue-se

$$I(u) \geq \left(\frac{m_1^{p-1}}{p} - \epsilon C\right)\|u\|_{1,p}^p - \overline{C}_\epsilon \|u\|_{1,p}^q.$$

Para $\|u\|_{1,p} = \rho$, temos

$$I(u) \geq \left(\frac{m_1^{p-1}}{p} - \epsilon C\right)\rho^p - \overline{C}_\epsilon \rho^q,$$

isto é,

$$I(u) \geq \left(\frac{m_1^{p-1}}{p} - \epsilon C - \overline{C}_\epsilon \rho^{q-p}\right)\rho^p.$$

Fixaremos $\rho > 0$ tal que

$$\frac{m_1^{p-1}}{p} - \epsilon C - \overline{C}_\epsilon \rho^{q-p} > 0,$$

ou seja,

$$\frac{m_1^{p-1}}{p} - \epsilon C \geq \overline{C}_\epsilon \rho^{q-p},$$

isto é,

$$0 < \rho^{q-p} \leq \left(\frac{m_1^{p-1}}{p\overline{C}_\epsilon} - \frac{\epsilon C}{\overline{C}_\epsilon}\right).$$

Logo,

$$0 < \rho < \left[\left(\frac{m_1^{p-1}}{p\overline{C}_\epsilon} - \frac{\epsilon C}{\overline{C}_\epsilon}\right)\right]^{1/q-p}.$$

Escolhendo $\rho = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{m_1^{p-1}}{p\overline{C}_\epsilon} - \frac{\epsilon C}{\overline{C}_\epsilon}\right)\right]^{1/q-p}$ temos

$$I(u) \geq \frac{\rho^p}{2}\left(\frac{m_1^{p-1}}{p^2} - \epsilon C\right) = r > 0.$$

Por $(f_4)$, existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$|F(x,t)| \geq C_1|t|^\mu - C_2 \quad \text{para todos } x \in \Omega \ \text{ e } \ t > 0.$$

Dessa forma, fixando uma função $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ com $\psi > 0$, temos

$$\begin{aligned} I(t\psi) &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|t\psi\|_{1,p}^p) - \int_\Omega F(x,t\psi) \\ &\leq \frac{1}{p}\widehat{M}(\|t\psi\|_{1,p}^p) - C_1 t^\mu \int_\Omega |\psi|^\mu + C_5. \end{aligned}$$

Assim,

$$I(t\psi) \leq \frac{1}{p}\int_0^{t_2}[M(s)]^{p-1}ds + \frac{1}{p}\int_{t_2}^{\|t\psi\|_{1,p}^p}[M(s)]^{p-1}ds - C_1 t^\mu \int_\Omega |\psi|^\mu + C_5.$$

Usando $(H_2)$,

$$I(t\psi) \leq \frac{m_2^{p-1}}{p} t^p \|\psi\|_{1,p}^p - C_1 t^\mu \int_\Omega \psi^\mu + \widetilde{C_5}$$

e desde que $\mu > p$

$$I(t\psi) \to -\infty \text{ quando } t \to +\infty.$$

Conseqüentemente, existe $t_0 > 0$ tal que

$$I(t_0\psi) < 0 \text{ com } \|t_0\psi\|_{1,p} > \rho$$

Dessa maneira o funcional $I$ satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Mostraremos que $I$ satisfaz a condição de Palais-Smale. Para isso, considere $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma seqüência Palais-Smale, isto é, uma seqüência tal que

$$I(u_n) \to c \text{ e } I'(u_n) \to 0.$$

Daí,

$$|I(u_n)| \leq C_3 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

e, para todo $n$ suficientemente grande,

$$|I'(u_n)u_n| \leq \|I'(u_n)\|\|u_n\|_{1,p} \leq C_3\|u_n\|_{1,p}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n &\leq |I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n| \\ &\leq |I(u_n)| + \frac{1}{\mu}|I'(u_n)u_n| \\ &\leq C_3 + \frac{1}{\mu}\|u_n\|_{1,p}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} C_3 + \frac{1}{\mu}\|u_n\|_{1,p} &\geq I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n \\ &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u_n\|_{1,p}^p) - \int_\Omega F(x, u_n^+) - \frac{1}{\mu}[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p \\ &+ \frac{1}{\mu}\int_\Omega f(x, u_n^+)u_n \\ &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u_n\|_{1,p}^p) - \frac{1}{\mu}[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p \\ &+ \int_\Omega \left[\frac{1}{\mu}f(x, u_n^+)u_n - F(x, u_n^+)\right]. \end{aligned}$$

Por $(f_4)$,

$$0 \leq \int_\Omega \left[\frac{1}{\mu} f(x,u_n^+)u_n - F(x,u_n^+)\right]$$

e daí,

$$\begin{aligned} C_3 + \frac{1}{\mu}\|u_n\|_{1,p} &\geq \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u_n\|_{1,p}^p) - \frac{1}{\mu}[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p \\ &= \frac{1}{p}\int_0^{\|u_n\|_{1,p}^p}[M(s)]^{p-1}ds - \frac{1}{\mu}[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p. \end{aligned}$$

Como $M^{p-1}$ é contínua, pelo Teorema do Valor Médio para as integrais, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $0 < \xi_n < \|u_n\|_{1,p}^p$ tal que

$$\int_0^{\|u_n\|_{1,p}^p}[M(s)]^{p-1}ds = [M(\xi_n)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p.$$

Logo,

$$C_3 + \frac{1}{\mu}\|u_n\|_{1,p} \geq [M(\xi_n)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p - \frac{1}{\mu}[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p.$$

Além disso, como $M$ é não-crescente

$$[M(\xi_n)]^{p-1} \geq [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} C_3 + \frac{1}{\mu}\|u_n\|_{1,p} &\geq \frac{1}{p}[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p - \frac{1}{\mu}[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)[M(\|u_n\|^p)]^{p-1}\|u_n\|^p. \end{aligned}$$

Desde que $\mu > p$, $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right) > 0$ e usando $(H_3)$ segue-se que $(u_n)$ é limitada.

Assim, a menos de subseqüência,

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{1,p}^p &\to \theta, \\ u_n &\rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega), \\ u_n &\to u \text{ em } L^s(\Omega), \quad 1 \leq s < p^*, \\ u_n(x) &\to u(x) \;\; q.s \text{ em } \Omega. \end{aligned}$$

Da continuidade de $M$

$$M(\|u_n\|_{1,p}^p) \to M(\theta)$$

e desde que $M(\theta) > 0$, existe $K > 0$ tal que

$$M(\|u_n\|_{1,p}^p) \geq K > 0, \text{ para } n \text{ suficientemente grande.}$$

Note que podemos considerar toda seqüência Palais-Smale não-negativa. De fato, sendo $(u_n)$ limitada a seqüência $u_n^- = u_n^+ - u_n$ é também limitada. Então,

$$I'(u_n)u_n^- \to 0.$$

Assim,

$$[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u_n^- - \int_\Omega f(u_n^+)u_n^- \to 0$$

e desde que $u_n = u_n^+ - u_n^-$, temos por $(f_2)$ e $(f_3)$

$$[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} |\nabla u_n^-|^2 \to 0,$$

o que implica

$$[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_n^-|^p \to 0$$

e daí

$$\|u_n^-\|_{1,p}^p \to 0. \tag{4.2}$$

Assim, podemos considerar $u_n = u_n^+ + o_n(1)$, de onde segue que

$$\|u_n\|_{1,p}^p = \|u_n^+\|_{1,p}^p + o_n(1).$$

Da continuidade de $\widehat{M}$

$$\widehat{M}(\|u_n\|_{1,p}^p) = \widehat{M}(\|u_n^+\|_{1,p}^p) + o_n(1)$$

e portanto,

$$I(u_n) = I(u_n^+) + o_n(1). \tag{4.3}$$

Além disso,

$$I'(u_n) = I'(u_n^+) + o_n(1).$$

De fato, desde que $M$ é contínua temos

$$[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1} = [M(\|u_n^+\|_{1,p}^p)]^{p-1} + o_n(1).$$

De (4.2), a menos de subseqüência, temos $\dfrac{\partial u_n^-}{\partial x}(x) \to 0$ q.s. em $\Omega$ assim,

$$\frac{\partial u_n(x)}{\partial x} - \frac{\partial u_n^+(x)}{\partial x} \to 0 \ q.s. \text{ em } \Omega$$

e daí

$$|\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x) - |\nabla u_n^+(x)|^{p-2}\nabla u_n^+(x) \to 0 \ q.s. \text{ em } \Omega.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Big| |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_n^+|^{p-2}\nabla u_n^+ \Big|^{p/p-1} &\leq \int_\Omega \Big( |\nabla u_n|^{p-2}|\nabla u_n| + |\nabla u_n^+|^{p-2}|\nabla u_n^+| \Big)^{p/p-1} \\
&\leq \int_\Omega \Big( |\nabla u_n|^{p-1} + |\nabla u_n^+|^{p-1} \Big)^{p/p-1} \\
&\leq C\bigg( \int_\Omega |\nabla u_n|^p + \int_\Omega |\nabla u_n^+|^p \bigg) \leq \widetilde{C},
\end{aligned}$$

pois $(u_n)$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Assim, pelo Teorema de Brézis-Lieb

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi = \int_\Omega |\nabla u_n^+|^{p-2}\nabla u_n^+ \nabla\varphi + o_n(1).$$

Logo,

$$I'(u_n) = I'(u_n^+) + o_n(1). \tag{4.4}$$

De (4.3) e (4.4), $(u_n^+)$ é uma seqüência Palais-Smale. De onde segue que qualquer seqüência Palais-Smale pode ser considerada uma seqüência não-negativa, logo, $u_n \geq 0$ e conseqüentemente $u \geq 0$.

Usando a desigualdade

$$< |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y > \geq \begin{cases} C_p|x-y|^p & \text{se } \ p \geq 2, \\[2mm] \dfrac{C_p|x-y|^2}{(|x|-|y|)^{2-p}} & \text{se } \ 1 < p < 2 \end{cases}$$

temos

$$\begin{aligned}
K^{p-1}C_p\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p &\leq [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\int_\Omega < |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla u_n - \nabla u > \\
&= [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p \\
&- \ [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u \\
&- [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u_n \\
&+ \ [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u\|_{1,p}^p.
\end{aligned}$$

Note que

$$[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u\|_{1,p}^p - [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u_n = o_n(1)$$

e assim,

$$\begin{aligned} K^{p-1}C_p\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p &\leq [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p \\ &- [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u \\ &+ o_n(1). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Usando $(f_2)$ e $(f_3)$, temos

$$|f(x,u_n)| \leq \epsilon|u_n|^{p-1} + C_\epsilon|u_n|^{q-1}.$$

Desde que $u_n \to u$ em $L^s(\Omega)$, $1 \leq s < p^*$, segue-se

$$\begin{aligned} u_n &\to u \text{ em } L^p(\Omega) \\ u_n &\to u \text{ em } L^q(\Omega) \end{aligned}$$

e como

$$u_n(x) \to u(x) \ \ q.s. \text{ em } \Omega,$$

existem $g \in L^p(\Omega)$, $h \in L^q(\Omega)$ tais que

$$\begin{aligned} |u_n(x)| \leq g \ \ q.s. \text{ em } \Omega \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \\ |u_n(x)| \leq h \ \ q.s. \text{ em } \Omega \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Sendo $f$ contínua,

$$f(x,u_n(x))u_n(x) \to f(x,u(x))u(x) \ \ q.s. \text{ em } \Omega.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |f(x,u_n(x))u_n(x)| &\leq |f(x,u_n(x))||u_n(x)| \\ &\leq \epsilon|u_n|^p + C_\epsilon|u_n|^q \\ &\leq \epsilon g^p + C_\epsilon h^q \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega f(x,u_n)u_n \to \int_\Omega f(x,u)u.$$

Por um raciocínio análogo, temos

$$\int_\Omega f(x,u_n)u \to \int_\Omega f(x,u)u.$$

Portanto, de (4.5),

$$\begin{aligned}
K^{p-1}C_p\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p \ &\leq\ [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p \\
&-\ \ [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u \\
&-\ \ \int_\Omega f(x,u_n(x))u_n(x) + \int_\Omega f(x,u_n(x))u(x) + o_n(1) \\
&=\ \ I'(u_n)u_n - I'(u_n)u \\
&=\ \ o_n(1).
\end{aligned}$$

De onde concluímos que

$$u_n \to u \ \text{ em } \ W_0^p(\Omega).$$

Pelo Teorema do Passo da Montanha, $I'(u) = 0$ e assim $u$ é solução do problema (4.1). Desde que $I(u) = c > 0$, concluímos que $u \not\equiv 0$.

■

## 4.2 Um Resultado de Existência e Multiplicidade

Nesta seção mostraremos um resultado de existência e multiplicidade de soluções não-triviais e não-negativas para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -[M(\|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u = \lambda u^r + f(x,u) \ \text{ em } \ \Omega, \\ \\ u = 0 \ \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.6}$$

onde $0 < r < p-1$, $1 < p < N$, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas satisfazendo as hipóteses $(H_1), (H_2)$,$(H_4)$ e $(f_1) - (f_4)$ da seção anterior. Substituiremos a hipótese $(H_3)$ pela condição:

$(H_3^{'})$ $\lim\limits_{t\to\infty}[M(t^p)]^{p-1}t^{(p-1)-r} = +\infty.$

Observe que para $r = 0$ as condições $(H_3)$ e $(H_3^{'})$ coincidem.

Para o caso $p = 2$, Alves, Corrêa e Ma [5] mostraram um resultado de existência e multiplicidade para o problema (4.6) usando o Princípio Variacional de Ekeland, o Teorema do Passo da Montanha e novamente estimativas do tipo Gidas-Spruck.

Motivados por esse resultado, vamos mostrar um teorema de existência e multiplicidade para o caso $p$ mais geral usando as mesmas técnicas usadas em [5] porém, sem fazer uso de estimativas semelhantes às usadas pelos autores supramencionados. Além disso, podemos notar que para $\lambda = 0$ e $r = 0$ os problemas (4.1) e (4.6) coincidem.

Temos o seguinte resultado:

**Teorema 4.3** *Suponhamos que $f$ e $M$ satisfaçam as condições $(f_1) - (f_4)$ e $(H_1)$, $(H_2)$, $(H_3^{'})$ e $(H_4)$. Então existe $\lambda^* > 0$ tal que para $\lambda \in (0, \lambda^*)$, o problema (4.6) possui pelo menos duas soluções $u_1$ e $u_2$ satisfazendo*

$$I(u_1) < 0 < I(u_2).$$

**Demonstração :** Considere o funcional energia $I : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (4.6)

$$I(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|_{1,p}^p) - \frac{\lambda}{r+1}\int_\Omega (u^+)^{r+1} - \int_\Omega F(x, u^+),$$

onde

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t [M(s)]^{p-1} ds, \quad F(x,t) = \int_0^t f(x,s) ds$$

e $u^+ = \max\{u, 0\}$.

Note que $I \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega); \mathbb{R})$ e

$$I'(u)\varphi = [M(\|u\|_{1,p}^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi - \lambda \int_\Omega (u^+)^r - \int_\Omega f(x, u^+)\varphi,$$

para todo $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

**Primeira Solução (Princípio Variacional de Ekeland)**

Para $\|u\|_{1,p} \leq t_1$, em virtude das condições $(H_1)$, $(f_2)$, $(f_3)$, das imersões de Sobolev, recordando que $|u^+| \leq |u|$ e considerando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtém-se

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{p} m_1^{p-1} \|u\|_{1,p}^p - \frac{C_4 \lambda}{r+1}\|u\|_{1,p}^{r+1} - \epsilon \|u\|_{1,p}^p - C_\epsilon \|u\|_{1,p}^q \\ &= C_5 \|u\|_{1,p}^p - \frac{C_4\lambda}{r+1}\|u\|_{1,p}^{r+1} - \widetilde{C_\epsilon}\|u\|_{1,p}^q. \end{aligned}$$

Fixemos $\rho > 0$ tal que $\|u\|_{1,p} = \rho \leq t_1$ e assim,

$$I(u) \geq C_5 \rho^p - \frac{C_4 \lambda}{r+1}\rho^{r+1} - \widetilde{C_\epsilon}\rho^q.$$

Escolhamos $\rho$, suficientemente pequeno, de maneira que

$$C_5\rho^p - \widetilde{C_\epsilon}\rho^q \geq \frac{C_5}{4}\rho^p.$$

Logo,

$$I(u) \geq \rho^p\left(\frac{C_5}{4} - \frac{C_4\lambda}{r+1}\rho^{(r+1)-p}\right)$$

e observando que

$$\begin{aligned}\frac{C_5}{4} - \frac{C_4\lambda}{r+1}\rho^{(r+1)-p} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{C_5}{4} > \frac{C_4\lambda}{r+1}\rho^{(r+1)-p} \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda < \frac{(r+1)C_5}{4C_4}\rho^{(p-1)-r},\end{aligned}$$

escolhamos $\lambda^* = \dfrac{(r+1)C_5}{8C_4}\rho^{(p-1)-r}$ de modo que para $\lambda \in (0, \lambda^*)$, teremos

$$I(u) \geq \frac{1}{8}\rho^p = \delta > 0 \text{ para } \|u\| = \rho.$$

Assim, $I$ é limitada inferiormente em $\overline{B}_\rho$ e portanto, existe $\inf\limits_{\overline{B}_\rho(0)} I$.

Considerando o espaço métrico completo $(M, d) = (B_\rho(0), \|.\|_{1,p})$, segue do Princípio Variacional de Ekeland que existe $(u_n) \subset \overline{B}_\rho(0)$ satisfazendo

$$I(u_n) \to \inf_{\overline{B}_\rho(0)} I \tag{4.7}$$

e

$$I(u_n) \leq I(u) + \frac{1}{n}\|u - u_n\|_{1,p}, \text{ para todo } u \in \overline{B}_\rho(0), u \neq u_n \tag{4.8}$$

**Afirmação 4.1** $\inf\limits_{\overline{B}_\rho(0)} I < 0.$

De fato, fixado $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi > 0$ e $t > 0$ tem-se

$$I(t\varphi) = \frac{1}{p}\int_0^{\|t\varphi\|_{1,p}^p}[M(s)]^{p-1}ds - \frac{\lambda t^{r+1}}{r+1}\int_\Omega \varphi^{r+1} - \int_\Omega F(x, t\varphi)$$

e

$$\|t\varphi\|_{1,p} \leq \|\varphi\|_{1,p}, \text{ para } 0 < t < 1.$$

Da continuidade de $M$, encontramos constantes $C, \widetilde{K} > 0$ tais que

$$C \leq M(s) \leq \widetilde{K}, \text{ para todo } s \in [0, \|\varphi\|_{1,p}^p].$$

Logo,

$$I(t\varphi) \leq \frac{\widetilde{K}^{p-1}}{p} t^p \|\varphi\|_{1,p}^p - \frac{\lambda t^{r+1}}{r+1} \int_\Omega \varphi^{r+1} - \int_\Omega F(x, t\varphi).$$

Por $(f_4)$, desde que $\varphi, t > 0$

$$\int_\Omega F(x, t\varphi) \geq 0.$$

Portanto,

$$I(t\varphi) \leq \frac{K^{p-1}}{p} t^p \|\varphi\|_{1,p}^p - \frac{\lambda t^{r+1}}{r+1} \int_\Omega \varphi^{r+1}$$

e como $1 < r+1 < p$ temos, para $t > 0$ suficientemente pequeno, $I(t\varphi) < 0$ e conseqüentemente,

$$\inf_{\overline{B}_\rho(0)} I \leq I(t\varphi) < 0.$$

demonstrando a afirmação.

Usando (4.7), existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma constante positiva $C_6$ tal que

$$I(u_n) \leq -C_6 \quad \text{para } n \geq n_0,$$

mostrando que $(u_n) \notin \partial B_\rho(0)$, pois tal fato implicaria em

$$I(u_n) \geq \delta > 0$$

contradizendo a Afirmação 4.1. Assim, $(u_n) \subset B_\rho(0)$.

Além disso, desde que $I \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, usando (4.8) encontramos

$$I'(u_n) \to 0.$$

Portanto, a seqüência minimizante $(u_n)$ satisfaz

$$\begin{aligned} I(u_n) &\to \inf_{\overline{B}_\rho(0)} I, \\ I'(u_n) &\to 0, \end{aligned} \tag{4.9}$$

implicando que $(u_n)$ é uma seqüência $(P.S)_{\inf_{\overline{B}_\rho(0)} I}$.

**Afirmação 4.2** *A seqüência $(u_n)$ possui uma subseqüência fortemente convergente.*

De fato, como $(u_n)$ é limitada, a menos de subseqüência, existem $\theta \in \mathbb{R}$ e $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo

$$
\begin{aligned}
\|u_n\|_{1,p}^p &\to \theta^p, \\
u_n &\rightharpoonup u_1 \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega), \\
u_n &\to u_1 \text{ em } L^s(\Omega), \quad 1 \leq s < p^*, \\
u_n(x) &\to u_1(x) \;\; q.s. \text{ em } \Omega.
\end{aligned}
$$

Da convergência fraca

$$
\underline{\lim}\|u_n\|_{1,p}^p \geq \|u_1\|_{1,p}^p.
$$

e desde que $\|u_n\|_{1,p} \leq \rho$, tem-se $u_1 \in \overline{B}_\rho(0)$.

Da continuidade de $M$ e do fato que $\|u_n\|_{1,p}^p \to \theta^p$, temos

$$
M(\|u_n\|_{1,p}^p) \to M(\theta).
$$

Sendo $M(\theta) > 0$, existe $K > 0$ tal que

$$
M(\|u_n\|_{1,p}^p) \geq K > 0, \quad \text{para } n \text{ suficientemente grande.}
$$

Argumentando como na seção anterior, desde que $u_n$ é uma seqüência $(P.S)$, podemos considerá-la uma seqüência não-negativa, isto é, $u_n \geq 0$ e assim $u_1 \geq 0$.

Usando a desigualdade

$$
< |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y > \geq \begin{cases} C_p|x-y|^p & \text{se } p \geq 2, \\ \dfrac{C_p|x-y|^2}{(|x|-|y|)^{2-p}} & \text{se } 1 < p < 2, \end{cases} \tag{4.10}
$$

obteremos

$$
\begin{aligned}
K^{p-1}C_p\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_1|^p &\leq [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\int_\Omega < |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1, \nabla u_n - \nabla u_1 > \\
&= [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p - [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u_1 \\
&- [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \nabla u_n + [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_1\|_{1,p}^p.
\end{aligned}
$$

Notando que

$$
[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_1\|_{1,p}^p - [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \nabla u_n = o_n(1),
$$

podemos concluir

$$
\begin{aligned}
K^{p-1}C_p\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_1|^p &\leq [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|^p \\
&- [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u_1 + o_n(1).
\end{aligned}
$$

Seguindo o mesmo raciocínio usado na seção anterior, as seguintes convergências ocorrem

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega f(x,u_n)u_1 &\rightarrow \int_\Omega f(x,u_1)u_1,\\
\int_\Omega f(x,u_n)u_n &\rightarrow \int_\Omega f(x,u_1)u_1,\\
\lambda\int_\Omega u_n^r u_1 &\rightarrow \lambda\int_\Omega u_1^{r+1},\\
\lambda\int_\Omega u_n^{r+1} &\rightarrow \lambda\int_\Omega u_1^{r+1}.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, obtemos

$$
\begin{aligned}
K^{p-1}C_p\int_\Omega|\nabla u_n-\nabla u_1|^p &\leq [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p-[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\int_\Omega|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla u_1\\
&- \lambda\int_\Omega u_n^{r+1}+\int_\Omega f(x,u_n)u_n+\lambda\int_\Omega u_n^r u_1-\int_\Omega f(x,u_n)u_1\\
&+ o_n(1)\\
&= I'(u_n)u_n-I'(u_n)u_1\\
&= o_n(1)
\end{aligned}
$$

e portanto,

$$u_n\rightarrow u_1 \ \text{ em } \ W_0^{1,p}(\Omega).$$

Sendo $I$ um funcional contínuo e da unicidade do limite

$$I(u_n)\rightarrow I(u_1)=\inf_{\overline{B}_\rho(0)} I.$$

Desde que $I'(u_n)\rightarrow 0$, $I'$ é contínua e da unicidade do limite

$$I'(u_n)\rightarrow I'(u_1)=0,$$

ou seja, $u_1$ é ponto crítico de $I$ e assim, $u_1$ é solução fraca do problema (4.6) com $I(u_1)<0$. Conseqüentemente $u_1\in B_\rho(0)$ e $u_1\not\equiv 0$.

**Segunda Solução (Teorema do Passo da Montanha)**

Notemos primeiramente que $I(0)=0$ e que existem $\rho,\delta>0$ tais que

$$I(u)\geq\delta \text{ para todo } u\in S_\rho(0).$$

Mostraremos que existe $e\in\overline{B}_\rho^c(0)$ com $I(e)<0$.

De fato, fixe $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi>0$ e considere $t>0$ tal que $\|t\varphi\|_{1,p}^p>t_2$. Assim,

$$I(t\varphi) \leq \frac{1}{p}\int_0^{t_2}[M(s)]^{p-1}ds + \frac{1}{p}\int_{t_2}^{\|t\varphi\|_{1,p}^p}[M(s)]^{p-1}ds - \frac{\lambda t^{r+1}}{r+1}\int_\Omega \varphi^{r+1} - \int_\Omega F(x,t\varphi).$$

De $(H_2)$,

$$I(t\varphi) \leq \frac{1}{p}\int_0^{t_2}[M(s)]^{p-1}ds + \frac{m_2^{p-1}}{p}t^p\|\varphi\|_{1,p}^p - \frac{m_2^{p-1}}{p}t_2 - \frac{\lambda t^{r+1}}{r+1}\int_\Omega \varphi^{r+1} - \int_\Omega F(x,t\varphi).$$

ou seja,

$$I(t\varphi) \leq \frac{1}{p}m_2^{p-1}t^p\|\varphi\|_{1,p}^p - \frac{\lambda t^{r+1}}{r+1}\int_\Omega \varphi^{r+1} - \int_\Omega F(x,t\varphi) + \widetilde{C}.$$

Denotando por $h(t) = \dfrac{F(x,t\varphi)}{t^\mu}$ para todo $t > 0$, por $(f_4)$,

$$h'(t) = \frac{1}{t^{\mu+1}}[t\varphi f(x,t\varphi) - \mu F(x,t\varphi)] \geq 0, \text{ para todo } t > 0$$

de onde segue que $h$ é crescente. Logo, para $t \geq 1$, $h(t) \geq h(1)$, isto é,

$$\frac{F(x,t\varphi)}{t^\mu} \geq F(x,\varphi)$$

e assim,

$$F(x,t\varphi) \geq t^\mu F(x,\varphi).$$

Portanto, para $t > t_2$ suficientemente grande

$$I(t\varphi) \leq \frac{1}{p}m_2^{p-1}t^p\|\varphi\|_{1,p}^p - \frac{\lambda t^{r+1}}{r+1}\int_\Omega \varphi^{r+1} - t^\mu\int_\Omega F(x,\varphi) + \widetilde{C}$$

e desde que $1 < r+1 < p < \mu$, segue-se que $I(t\varphi) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Fazendo $e = t\varphi$ com $t$ suficientemente grande,

$$I(e) < 0, \quad e \in \overline{B}_\rho^c(0).$$

**Afirmação 4.3** *O funcional $I$ satisfaz a condição de Palais-Smale.*

De fato, seja $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma seqüencia Palais-Smale, isto é,

$$I(u_n) \to c \ \text{ e } \ I'(u_n) \to 0.$$

Assim, existe $C > 0$ tal que

$$|I(u_n)| \leq C, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

e

$$|I'(u_n)u_n| \leq \|u_n\|_{1,p},$$

para todo $n$ suficientemente grande. De onde segue

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n \leq C + \frac{1}{\mu}\|u_n\|_{1,p}$$

e como $u_n = u_n^+ - u_n^-$ segue-se

$$\begin{aligned}
C + \frac{1}{\mu}\|u_n\| &\geq I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n \\
&= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u_n\|_{1,p}^p) - \frac{\lambda}{r+1}\int_\Omega (u_n^+)^{r+1} - \int_\Omega F(x, u_n^+) \\
&- \frac{1}{\mu}[M(\|u_n\|_{1,p}^p]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p + \frac{1}{\mu}\int_\Omega (u_n^+)^{r+1} + \frac{1}{\mu}\int_\Omega f(x, u_n^+)u_n \\
&= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u_n\|_{1,p}^p) - \frac{1}{\mu}[M(\|u_n\|_{1,p}^p]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p \\
&- \left(\frac{\lambda}{r+1} - \frac{\lambda}{\mu}\right)\int_\Omega (u_n^+)^{r+1} + \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu}f(x, u_n^+)u_n - F(x, u_n^+)\right).
\end{aligned}$$

Por $(f_4)$,

$$C + \frac{1}{\mu}\|u_n\|_{1,p} \geq \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u_n\|_{1,p}^p) - \frac{1}{\mu}[M(\|u_n\|_{1,p}^p]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p - \left(\frac{\lambda}{r+1} - \frac{\lambda}{\mu}\right)|u_n^+|_{r+1}^{r+1}$$

e desde que $\left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{\lambda}{r+1}\right) < 0$ segue das imersões de Sobolev e do fato que $u_n^+ \leq |u_n|$

$$C + \frac{1}{\mu}\|u_n\|_{1,p} \geq \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u_n\|_{1,p}^p) - \frac{1}{\mu}[M(\|u_n\|_{1,p}^p]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p - \overline{C}\|u_n\|_{1,p}^{r+1}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio para as integrais, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $0 < \xi_n < \|u_n\|_{1,p}^p$ tal que

$$\int_0^{\|u_n\|_{1,p}^p} [M(s)]^{p-1}ds = [M(\xi_n)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p.$$

Além disso, sendo $M$ não-crescente

$$[M(\xi_n)]^{p-1} \geq [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}.$$

Assim,

$$C+\frac{1}{\mu}\|u_n\|_{1,p} \geq \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)[M(\|u_n\|^p_{1,p}]^{p-1}\|u_n\|^p_{1,p}-\overline{C}\|u_n\|^{r+1}_{1,p}.$$

Fazendo $0 \leq \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)=\widehat{C}$, obtemos

$$\widehat{C}[M(\|u_n\|^p_{1,p}]^{p-1}\|u_n\|^p_{1,p} \leq C+\frac{1}{\mu}\|u_n\|_{1,p}+\overline{C}\|u_n\|^{r+1}_{1,p}$$

e de $(H_3^{'})$ segue-se que $(u_n)$ é limitada e portanto, a menos de subseqüência

$$\begin{array}{rcl} u_n & \rightarrow & u_2 \ \text{ em } \ W_0^{1,p}(\Omega) \\ \|u_n\|^p_{1,p} & \rightarrow & \alpha, \\ u_n & \rightharpoonup & u_2 \ \text{ em } \ L^s(\Omega), \ \ 1 \leq s < p^*, \\ u_n(x) & \rightarrow & u_2(x) \ \ q.s. \ \text{ em } \ \Omega. \end{array}$$

Repetindo os mesmos argumentos usados na demonstração da Afirmação (4.2) concluímos que $u_n \geq 0$, $u_2 \geq 0$ e

$$u_n \rightarrow u_2 \ \text{ em } \ W_0^{1,p}(\Omega).$$

Pelo Teorema do Passo da Montanha $I'(u_2)=0$ e desde que $I(u_2)=c>0$, tem-se $u_2 \not\equiv 0$.

Assim, obtivemos duas soluções fracas não-triviais e não-negativas $u_1$ e $u_2$ do problema (4.6) tais que $I(u_1)<0<I(u_2)$, o que conclui a demonstração do Teorema 4.3. ■

# Capítulo 5

# Equações Elípticas do Tipo p-Kirchhoff Com Não-Linearidade Descontínua

## 5.1 Resultados Abstratos

Nesta seção veremos alguns resultados básicos da teoria dos pontos críticos para funcionais localmente lipschitzianos, desenvolvido por Chang [18], baseados na Análise Convexa e no cálculo subdiferencial de Clark [21].

**Definição 5.1** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que $I$ é um funcional localmente lipschitziano ($I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$), se dado $u \in X$, existir uma vizinhança $V \equiv V_u \subset X$ e uma constante $k = k_V > 0$ tal que*

$$|I(v_2) - I(v_1)| \leq k\|v_2 - v_1\|, \quad v_1, v_2 \in V.$$

**Definição 5.2** *A derivada direcional de $I$ em $u$ na direção de $v \in X$ é definida por*

$$I^0(u; v) = \limsup_{h\to 0, \lambda\to 0^+} \frac{I(u + h + \lambda v) - I(u + h)}{\lambda}.$$

Pode-se provar que $I^0(u; v)$ é subaditiva e positivamente homogênea isto é,

$$\begin{aligned} I^0(u; v_1 + v_2) &\leq I^0(u; v_1) + I^0(u; v_2), \\ I^0(u; \lambda v) &= \lambda I^0(u; v), \end{aligned}$$

para todo $u, v_1, v_2 \in X$ e $\lambda > 0$.

Usando essas condições, segue-se

$$|I^0(u; v_1) - I^0(u; v_2)| \leq K|v_1 - v_2|, \quad K = K_u > 0.$$

Conseqüentemente, $I^0(u;.)$ é contínuo e como também é convexo, podemos considerar sua subdiferencial em $z \in X$, o qual é dada por

$$\partial I^0(u;z) = \{\mu \in X^*; I^0(u;v) \geq I^0(u;z) + <\mu, v-z>, v \in X\},$$

onde $X^*$ é o dual topológico de $X$ e $<,>$ é o par de dualidade entre $X^*$ e $X$.

**Definição 5.3** *Definimos o gradiente generalizado de $I$ em $u$ como sendo o conjunto*

$$\partial I(u) = \{\mu \in X^*; I^0(u;v) \geq <\mu, v>, \text{ para toda } v \in X\}.$$

Desde que $I^0(u;0) = 0$, segue-se que $\partial I(u) = \partial I^0(u;0)$. Além disso, para todo $v \in X$, temos

$$I^0(u;v) = \max\{<\mu, v>; \mu \in \partial I(u)\}$$

Uma importante propriedade do gradiente generalizado é a seguinte: Se $u \in X$ então $\partial I(u)$ é um conjunto convexo, não vazio e fraco$^*$-compacto. Em particular, existe $w \in \partial I(u)$ tal que

$$m(u) = \min\{||w||_*; w \in \partial I(u)\}.$$

Outras propriedades sobre derivada direcional e gradiente generalizado podem ser vistas em [21] e [35].

Note que $\partial I(u) = \{I'(u)\}$ quando $I \in C^1(X, \mathbb{R})$.

**Definição 5.4** *Uma seqüência $(u_n) \subset X$ é uma seqüência de Palais-Smale no nível $c$ ($(PS)_c$), se*

$$\begin{aligned} I(u_n) &\rightarrow c, \\ m(u_n) &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Definição 5.5** *Um funcional $I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $c$, se toda seqüência $(PS)_c$ possui uma subseqüência fortemente convergente.*

Na demonstração do resultado principal deste capítulo usaremos uma versão do Teorema do Passo da Montanha para funcionais $Lip_{loc}$, o qual foi demonstrado por Chang em [18], usando uma variante apropriada do Lema de Deformação, tal resultado também pode ser encontrado em [35].

Dizemos que um ponto $u_0 \in X$ é um ponto crítico de $I$ se $0 \in \partial I(u_0)$. Um ponto de mínimo (máximo) local é um ponto crítico.

**Teorema 5.1** *Seja $I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, tal que $I(0) = 0$ e suponhamos que:*

*(i) Existem constantes $\eta > 0$ e $\rho > 0$, tais que $I(u) > \eta$, para $\|u\| = \rho$, $u \in X$;*

*(ii) Existe $e \in X$, com $\|e\| > \rho$, tal que $I(e) < 0$.*

*Se, além disso, $I$ satisfizer a condição de Palais-Smale no nível $c$ com $c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$ onde*

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], x), \gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(1) = e\}$$

*então $c > 0$ é um valor crítico de $I$.*

## 5.2 Um Resultado de Existência e Multiplicidade

Nesta seção vamos estudar a existência e multiplicidade de soluções não-triviais e não-negativas para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -[M(\|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u = \lambda H(u-a)u^q + h(x)u^s \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \\ u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $\Omega$ é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo as condições:

$(H_1)$ Existem $m_1, t_1 > 0$ tais que

$$M(t) \geq m_1 \quad \text{se} \quad 0 \leq t \leq t_1,$$

$(H_2)$ Existem $m_2, t_2 > 0$ tais que

$$M(t) \leq m_2 \quad \text{se} \quad t \geq t_2,$$

$(H_3)$ $\lim_{t\to\infty} [M(t^p)]^{p-1} t^{(p-1)-q} = +\infty$,

$(H_4)$ $M$ é não-crescente e $M(t) > 0$ para todo $t \geq 0$,

onde $1 < q+1 < p < s+1 < p^*$, $a > 0$ e $\lambda > 0$ parâmetros reais, $h : \Omega \to (0, \infty)$ uma função positiva mensurável com $h \in L^\infty(\Omega)$ e $H$ é uma função de Heaviside, isto é,

$$H(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{se} \quad t \leq 0, \\ \\ 1 \quad \text{se} \quad t > 0. \end{cases}$$

Como foi dito na introdução, problemas com não-linearidade descontínuas modelam diversos problemas que surgem na física matemática. Entre os exemplos típicos, citamos o modelo para a condutividade do calor em meios elétricos. Este modelo tem uma descontinuidade em suas leis constitutivas. Na realidade, considerando $\Omega$ um domínio em meios elétricos, a condutividade térmica e elétrica será denotada por $K$ e $\sigma$, respectivamente, $x \in \Omega$ e $t$ representará a temperatura. Por estarmos trabalhando em meios elétricos, a função $\sigma$ pode ter descontinuidade em $t$ e a distribuição de temperatura é desconhecida. A equação diferencial que descreve esta distribuição é

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left( K(x, u(x)) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) = \sigma(x, u(x)).$$

Note que esta equação está relacionada com um problema de fronteira livre no qual a superfície de descontinuidade da condutividade elétrica é desconhecida. Descrevemos esta superfície como sendo

$$\Gamma_\alpha(u) = \{x \in \Omega, u(x) = \alpha,\ \sigma \text{ é descontínua em } \alpha\}.$$

Quando a condutividade térmica $K$ é constante e a condutividade elétrica $\sigma$ tem um único salto e crescimento sublinear e subcrítico, o modelo se torna

$$-\Delta u = \lambda H(u-a)u^q + h(x)u^s \text{ em } \Omega$$

onde $H$ é uma função de Heaviside, $0 < q < 1 < s < 2^* - 1$, $\lambda$ é um parâmetro positivo e $h$ é uma função mensurável definida em $\Omega$.

Observe que, nesse modelo, a superfície de descontinuidade é representada pelo conjunto

$$\Gamma_a(u) = \{x \in \Omega, u(x) = a\}.$$

Utilizando métodos variacionais aplicados a um funcional dual definido não em $H_0^1(\Omega)$ mas em $L^2(\Omega)$, Ambrosetti e Turner [8] obtiveram resultados sobre existência, multiplicidade e simetria (quando $\Omega$ é simétrico) de soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = H(u-a)\rho(u) \text{ em } \Omega \\ \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Com argumentos de Bifurcação Global, Ambrosetti, Calahorrano e Dobarro [6] estudaram equações do tipo

$$-\Delta u = H(u-a) \text{ em } \Omega$$

tanto no caso em que $\Omega$ é limitado, quanto no caso onde $\Omega = \mathbb{R}^N$, obtendo soluções do tipo ground-state.

Entretanto, a equação

$$-\Delta u + b(x)u = \rho(x)u^q \text{ em } \mathbb{R}^N$$

onde o potencial $b$ é uma função que pode mudar de sinal e $q \in (0,1)$, foi estudada por Badiale e Dobarro [13], que usaram minimização com vínculos e princípios de concentração de compacidade para lidar com as seqüências minimizantes no caso $\rho \equiv -1$ e minimização e técnica de sub e supersoluções para o caso $\rho \equiv 1$ .

Para $\Omega$ limitado, Badiale [11],[12] estudou a equação

$$-\Delta u = \lambda H(u-a) + u^{p-1} \text{ em } \Omega$$

obtendo resultados de existência de soluções positivas para valores apropriados de $a > 0$ quanto de $\lambda > 0$ no caso em que $p = 2^*$. Em [11] o autor aplica argumentos de minimax a um funcional dual associado ao problema acima, enquanto que em [12] é usado cálculo subdiferencial para funcionais localmente lipschitzianos. Badiale e Tarantello [14] provaram vários resultados de existência e multiplicidade para equações do tipo acima, usando argumentos variacionais para funcionais localmente lipschitzianos.

Em 2002 Alves, Bertone e Gonçalves [2] empregaram técnicas variacionais para estudar questões sobre existência, multiplicidade e regularidade de soluções positivas para a equação

$$-\Delta u = \lambda h(x)H(u-a)u^q + u^{2^*-1} \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

No ano seguinte Alves e Bertone [1] estudaram questões de existência e multiplicidade para a equação

$$-\Delta_p u = H(u-a)u^{p^*-1} + \lambda h(x) \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Nos dois últimos artigos foram utilizados variantes para funcionais localmente lipschitzianos do Teorema do Passo da Montanha, o Princípio Variacional de Ekeland e Cálculo Subdiferencial

Para o caso de sistema elíptico com não-linearidade descontínua podemos citar o artigo de Corrêa e Gonçalves [25], que obtiveram resultados de existência e regularidade de soluções para o sistema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega \\ -\Delta v = \delta u - \gamma v \text{ em } \Omega \\ \qquad u, v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável e $\delta, \gamma \geq 0$ são constantes, usando argumentos de minimização para uma equação íntegro-diferencial equivalente ao problema original e Cálculo Subdiferencial.

O problema (5.1) é uma variação dos problemas anteriormente citados, mais especificamente fomos motivados pelo trabalho de Alves e Bertone [2]. Nesta seção usaremos técnicas semelhantes utilizadas pelos autores para provar um resultado de existência e multiplicidade para o problema (5.1).

Não conhecemos na literatura nenhum resultado para problemas não-locais com não-linearidade descontínua. Portanto, nosso resultado parece ser novo mesmo para o caso $p = 2$.

Usaremos técnicas variacionais aplicadas ao funcional não-diferenciável

$$I_{\lambda,a}(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|_{1,p}^p) - \lambda\psi(u) - \frac{\lambda}{s+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{s+1}$$

onde

$$\begin{aligned} \widehat{M}(t) &= \int_0^t [M(s)]^{p-1} ds \\ \psi(u) &= \int_\Omega F(u) \end{aligned}$$

com $F(u) = \displaystyle\int_0^u f(t)dt$, $f(t) = H(t-a)(t^+)^q$ com $t^+ = \max\{0, t\}$.

Como uma solução do problema (5.1) entendemos uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo

$$-[M(\|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u(x) - h(x)u(x)^s \in \lambda\widehat{f}(u(x)) \quad q.s. \text{ em } \Omega \tag{5.2}$$

sendo $\widehat{f}$ a função multivalente

$$\widehat{f}(s) = \begin{cases} [f_-(a), f_+(a)] & \text{se } s = a, \\ \{f(s)\} & \text{se } s \neq a, \end{cases}$$

com $f(t) = H(t-a)(t^+)^q$ não-decrescente, $f_+(t) = \lim\limits_{\delta\to 0^+} f(t+\delta)$ e $f_-(t) = \lim\limits_{\delta\to 0^+} f(t-\delta)$.

**Observação 5.1** *Considere o conjunto de níveis*

$$\Gamma_a(u) = \{x \in \Omega; u(x) = a\}.$$

*Note que, se $|\Gamma_a(u)| = 0$, então $u$ satisfaz*

$$-[M(\|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u(x) = \lambda H(u(x)-a)u(x)^q + h(x)u(x) \quad q.s. \ \ em \ \ \Omega. \tag{5.3}$$

*Claramente uma solução do tipo (5.3) é também uma solução do tipo (5.2).*

Enunciaremos agora o principal resultado deste capítulo.

**Teorema 5.2** *Suponhamos que $M$ satisfaça as condições $(H_1)-(H_4)$ e $h \in L^\infty(\Omega)$. Então existem $\lambda^* > 0$ e $a^* > 0$ tais que para $\lambda \in (0,\lambda^*)$ e $a \in (0,a^*)$ o problema (5.1) possui duas soluções não-triviais e não-negativas $u_1$ e $u_2$ satisfazendo:*

*(i)* $|\Gamma_a(u_i)| = 0, \quad i = 1,2,$

*(ii)* $I_{\lambda,a}(u_2) < 0 < I_{\lambda,a}(u_1),$

*(iii)* $|\{x \in \Omega; u_i(x) > a\}| > 0, \quad i = 1,2.$

Para demonstrarmos o Teorema 5.2 precisaremos de alguns lemas que veremos a seguir.

**Lema 5.1** *Existe $\lambda^* > 0$ tal que o funcional $I_{\lambda,a}$ satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha, para todo $a > 0$.*

**Demonstração :** Recordemos que

$$I_{\lambda,a}(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|_{1,p}^p) - \lambda\psi(u) - \frac{1}{s+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{s+1}$$

onde $\widehat{M}(t) = \int_0^t [M(s)]^{p-1}ds$, $\psi(u) = \int_\Omega F(u)$, $F(u) = \int_0^u f(t)dt$ com $f(t) = H(t-a)(t^+)^q$.

(i) Considere $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $0 < \|u\|_{1,p} = \rho < t_1$ então por $(H_1)$,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u) &\geq \frac{m_1^{p-1}}{p}\|u\|_{1,p}^p - \lambda\int_\Omega F(u) - \frac{1}{s+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{s+1} \\ &= \frac{m_1^{p-1}}{p}\|u\|_{1,p}^p - \lambda\int_\Omega\int_0^u H(t-a)(t^+)^q dtdx - \frac{1}{s+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{s+1} \end{aligned}$$

Observando que $H \leq 1$ e $u^+ \leq |u|$ temos

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u) &\geq \frac{m_1^{p-1}}{p}\|u\|_{1,p}^p - \lambda\int_\Omega\int_0^u (t^+)^q dtdx - \frac{1}{s+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{s+1} \\ &\geq \frac{m_1^{p-1}}{p}\|u\|_{1,p}^p - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1} - \frac{1}{s+1}\int_\Omega h(x)|u|^{s+1} \\ &= \frac{m_1^{p-1}}{p}\|u\|_{1,p}^p - \frac{\lambda}{q+1}|u|^{q+1} - \frac{1}{s+1}\int_\Omega h(x)|u|^{s+1}. \end{aligned}$$

Das imersões de Sobolev e do fato que $h \in L^\infty(\Omega)$

$$I_{\lambda,a}(u) \geq \frac{m_1^{p-1}}{p}\|u\|_{1,p}^p - \frac{C_1\lambda}{q+1}\|u\|_{1,p}^{q+1} - C_2\|u\|_{1,p}^{s+1}.$$

Como $0 < \|u\|_{1,p} = p < t_1$,

$$I_{\lambda,a}(u) \geq \frac{m_1^{p-1}}{p}\rho^p - \frac{C_1\lambda}{q+1}\rho^{q+1} - C_2\rho^{s+1}.$$

Escolhamos $\rho > 0$ de modo que

$$\frac{m_1^{p-1}}{p}\rho^p - C_2\rho^{s+1} \geq \frac{m_1^{p-1}}{2p}\rho^p.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u) &\geq \frac{m_1^{p-1}}{2p}\rho^p - \frac{C_1\lambda}{q+1}\rho^{q+1} \\ &= \rho^p\left(\frac{m_1^{p-1}}{2p} - \frac{C_1\lambda}{q+1}\rho^{(q+1)-p}\right). \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{m_1^{p-1}}{2p} - \frac{C_1\lambda}{q+1}\rho^{(q+1)-p} > 0 &\iff \frac{C_1\lambda}{q+1}\rho^{(q+1)-p} < \frac{m_1^{p-1}}{2p} \\ &\iff 0 < \lambda < \frac{m_1^{p-1}(q+1)}{2pC_1\rho^{(q+1)-p}}. \end{aligned}$$

Escolhendo $\lambda^* = \dfrac{m_1^{p-1}(q+1)}{4pC_1\rho^{(q+1)-p}}$, para $\lambda \in (0, \lambda^*)$ temos

$$I_{\lambda,a}(u) \geq \frac{m_1^{p-1}}{2p}\rho^p = \eta > 0.$$

Portanto,

$$I_{\lambda,a}(u) \geq \eta > 0, \quad \text{para} \quad 0 < \|u\|_{1,p} = \rho.$$

(ii) Considere $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi > 0$. Assim, para $t > 0$ com $\|t\varphi\|_{1,p}^p > t_2$, segue de $(H_2)$,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(t\varphi) &\leq \frac{1}{p}\int_0^{t_2}[M(s)]^{p-1}ds + \frac{1}{p}\int_{t_2}^{\|t\varphi\|_{1,p}^p}[M(s)]^{p-1}ds - \lambda\int_\Omega F(t\varphi) \\ &- \frac{1}{s+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{s+1} \\ I_{\lambda,a}(t\varphi) &\leq \frac{1}{p}\int_0^{t_2}[M(s)]^{p-1}ds + \frac{1}{p}m_2^{p-1}t^p\|\varphi\|_{1,p}^p - \lambda\int_\Omega\int_0^{t\varphi} H(s-a)(s^+)^q dsdx \\ &- \frac{1}{s+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{s+1}. \end{aligned}$$

Desde que $H \geq 0$, segue-se

$$I_{\lambda,a}(t\varphi) \leq \frac{1}{p}m_2^{p-1}t^p\|\varphi\|_{1,p}^p - \frac{1}{s+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{s+1} + \widetilde{C}$$

e como $1 < q+1 < p < s+1$, teremos

$$I_{\lambda,a}(t\varphi) \to -\infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty.$$

Assim, existe $e = t_0\varphi$ tal que

$$I_{\lambda,a}(e) < 0, \quad \text{com} \quad e \in \overline{B}^c_\delta(0).$$

■

**Observação 5.2** *Usando o Lema 5.1 podemos concluir do Teorema do Passo da Montanha para funcionais $Lip_{loc}$ que existe $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que*

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) &\to c, \\ m(u_n) &\to 0. \end{aligned}$$

**Lema 5.2** *Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\omega \in \partial\psi(u)$ então*

$$\omega(x) \in [f_-(u(x)), f_+(u(x))] \quad q.s. \quad em \quad \Omega.$$

**Demonstração :** Recorde que o gradiente generalizado de $\psi$ em $u$ é dado por

$$\partial\psi(u) = \{\mu \in (W_0^{1,p}(\Omega))^*; \psi^0(u,v) \geq < \mu, v >, \text{ para toda } v \in \ W_0^{1,p}(\Omega)\}$$

onde

$$\psi^0(u,v) = \limsup_{h \to 0, \delta \to 0^+} \frac{\psi(u+h+\delta v) - \psi(u+h)}{\delta}.$$

Note também que

$$0 \leq f_-(u(x)) \leq f_+(u(x)) \leq (u^+)^q \quad q.s. \text{ em } \Omega.$$

Seja $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $\mu_n \to 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\delta_n \to 0^+$ tal que

$$\psi^0(u,v) = \limsup_{n \to \infty} \frac{\psi(u+\mu_n+\delta_n v) - \psi(u+\mu_n)}{\delta_n}.$$

Assim

$$\psi^0(u,v) = \limsup_{n \to \infty} \left( \int_{\{v>0\}} G_n(v(x)) + \int_{\{v<0\}} G_n(v(x)) \right) \tag{5.4}$$

com

$$G_n(v(x)) = \frac{1}{\delta_n}\bigg( F(u(x)+\mu_n+\delta_n v(x)) - F(u(x)+\mu_n) \bigg).$$

Desde que $\mu_n \to 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, a menos de subseqüência, temos

$$\mu_n(x) \to 0 \quad q.s. \text{ em } \Omega$$

e além disso, para cada $x$ tal que $v(x) > 0$, do Teorema do Valor Médio

$$\limsup_{n\to\infty} G_n(v(x)) \leq f_+(u(x))v(x) \quad q.s. \text{ em } \Omega.$$

Observemos que,

$$\begin{aligned}
|G_n(v(x))| &= \left|\frac{1}{\delta_n}\Big[F(u(x)+\mu_n(x)+\delta_n v(x)) - F(u(x)+\mu_n(x))\Big]\right| \\
&= \left|\frac{1}{\delta_n}\int_0^{u(x)+\mu_n(x)+\delta_n v(x)} H(t-a)(t^+)^q dt - \frac{1}{\delta_n}\int_0^{u(x)+\mu_n(x)} H(t-a)(t^+)^q dt\right| \\
&= \frac{1}{\delta_n}\left|\int_{u(x)+\mu_n(x)}^{u(x)+\mu_n(x)+\delta_n v(x)} H(t-a)(t^+)^q dt\right|.
\end{aligned}$$

Como $H \leq 1$, segue-se

$$\begin{aligned}
|G_n(v(x))| &\leq \frac{1}{\delta_n}\int_{u(x)+\mu_n(x)}^{u(x)+\mu_n(x)+\delta_n v(x)} (t^+)^q dt \\
&\leq \frac{1}{q+1}\frac{[u(x)+\mu_n(x)+\delta_n v(x)]^{q+1} - [u(x)+\mu_n(x)]^{q+1}}{\delta_n}
\end{aligned}$$

Usando o Teorema do Valor Médio, dado $0 < |\delta_n| < 1$, existe $\theta_n \in (0,1)$, tal que

$$|G_n(v(x))| \leq |u(x)|^q|v(x)| + |\mu_n(x)|^q|v(x)| + |v(x)|^{q+1}$$

e desde que $\mu_n \to 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, a menos de subseqüência, existe $g \in L^q(\Omega)$ tal que

$$|\mu_n(x)| \leq g(x) \quad q.s. \text{ em } \Omega.$$

Assim,

$$|G_n(v(x))| \leq |u(x)|^q|v(x)| + |g(x)|^q|v(x)| + |v(x)|^{q+1} \in L^1(\Omega).$$

Como

$$\limsup G_n(v(x)) \leq f_+(u(x))v(x) \quad q.s. \text{ em } \Omega,$$

segue do Lema de Fatou

$$\limsup \int_{\{v>0\}} G_n(v(x)) \leq \int_{\{v>0\}} f_+(u(x))v(x).$$

Analogamente, temos que

$$\limsup \int_{\{v<0\}} G_n(v(x)) \leq \int_{\{v<0\}} f_-(u(x))v(x)$$

Das desigualdades acima e por densidade temos que a seguinte desigualdade

$$\psi^0(u,v) \leq \int_{\{v<0\}} f_-(u(x))v(x) + \int_{\{v>0\}} f_+(u(x))v(x) \tag{5.5}$$

é válida para as funções de $L^p(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Seja $\omega \in \partial\psi(u) \subset (L^p(\Omega))^* \subset (W_0^{1,p}(\Omega))$ e suponhamos, por contradição, que exista $A \subset \Omega$ com $|A| > 0$, tal que

$$\omega(x) < f_-(u(x)) \ \text{ em } \ A.$$

Assim,

$$\int_A \omega(x) < \int_A f_-(u(x)). \tag{5.6}$$

Note que

$$-\int_A \omega(x) = \int_\Omega \omega(x)(-\chi_A)$$

onde $\chi_A$ é a função característica de $A$ e $-\chi_A \in L^p(\Omega)$.

Pelo Teorema de Representação de Riez, temos

$$< \omega, -\chi_A >= \int_\Omega \omega(-\chi_A).$$

Como $\omega \in \partial\psi(u)$, segue-se

$$< \omega, -\chi_A > \leq \psi^0(u, -\chi_A).$$

Por (5.5), temos

$$\int_\Omega \omega(x)(-\chi_A) =< \omega, -\chi_A > \leq \psi^0(u,-\chi_A) \leq \int_{\overline{v}<0} f_-(u(x))\overline{v} = -\int_A f_-(u(x))$$

onde $\overline{v} = -\chi_A$.

Portanto,

$$-\int_A \omega(x) \leq -\int_A f_-(u(x)),$$

isto é,

$$\int_A f(u(x)^-) \leq \int_A \omega(x),$$

o que contradiz (5.6).

Logo,

$$f_-(u(x)) \leq \omega(x) \ \ q.s. \ \text{ em } \ \Omega.$$

De maneira análoga mostra-se que

$$\omega(x) \leq f_+(u(x)) \;\; q.s. \;\text{ em }\; \Omega.$$

Assim, se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\omega \in \partial\psi(u)$, então

$$\omega(x) \in [f_-(u(x)), f_+(u(x))] \;\; q.s. \;\text{ em }\; \Omega.$$

■

**Lema 5.3** *O funcional $I_{\lambda,a}$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c.*

**Demonstração :** Seja $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) &\to c, \\ m(u_n) &\to 0. \end{aligned}$$

Considere

$$I_{\lambda,a}(u) = \phi(u) - \lambda\psi(u) - J(u)$$

onde $\phi(u) = \dfrac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|_{1,p}^p)$, $\psi(u) = \displaystyle\int_\Omega F(u)$ e $J(u) = \dfrac{1}{s+1}\displaystyle\int_\Omega h(x)(u^+)^{s+1}$.

Seja $(\omega_n) \subset (W_0^{1,p}(\Omega))^*$ tal que $m(u_n) = \|\omega_n\|_*$ e

$$\omega_n = \phi'(u) - \lambda\rho_n - J'(u) \tag{5.7}$$

com $(\rho_n) \subset \partial\psi(u_n)$.

Provaremos que $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é limitada.

De (5.7),

$$\omega_n + \lambda\rho_n = \phi'(u_n) - J'(u_n)$$

e assim,

$$< \omega_n + \lambda\rho_n, u_n >= [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p - \int_\Omega h(x)(u_n^+)^s u_n.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{s+1} < \omega_n + \lambda\rho_n, u_n > &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u_n\|_{1,p}^p) - \lambda\int_\Omega F(u_n) - \frac{1}{s+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{s+1} \\ &- \frac{1}{s+1}[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p + \frac{1}{s+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^s u_n. \end{aligned}$$

Sabendo que $u_n = u_n^+ - u_n^-$

$$\begin{aligned} \frac{1}{s+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^s u_n &= \frac{1}{s+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^s(u_n^+ - u_n^-) \\ &= \frac{1}{s+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^s u_n^+ - \frac{1}{s+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^s u_n^- \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{1}{s+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^s u_n = \frac{1}{s+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{s+1},$$

implicando

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{s+1} < \omega_n + \lambda\rho_n, u_n > &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u_n\|_{1,p}^p) - \lambda\int_\Omega F(u_n) \\ &- \frac{1}{s+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{s+1} \\ &- \frac{1}{s+1}[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p \\ &+ \frac{1}{s+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{s+1}. \end{aligned}$$

De onde segue

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{s+1} < \omega_n + \lambda\rho_n, u_n > &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u_n\|_{1,p}^p) - \frac{1}{s+1}[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p \\ &- \lambda\int_\Omega F(u_n). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Desde que $(u_n)$ é uma seqüência $(PS)_c$ existe $C_2 > 0$ verificando

$$|I_{\lambda,a}(u_n)| \leq C_2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

e como

$$\frac{1}{s+1}[- < \omega_n, u_n >] \leq \frac{1}{s+1}| < \omega_n, u_n > | \leq \frac{1}{s+1}\|\omega_n\|_*\|u_n\|_{1,p} \leq C_3\|u_n\|_{1,p}$$

obtemos

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{s+1} < \omega_n + \lambda\rho_n, u_n > &\leq C_2 + \frac{1}{s+1}[- < \omega_n + \lambda\rho_n, u_n >] \\ &\leq C_2 + \frac{1}{s+1}|< \omega_n + \lambda\rho_n, u_n >| \\ &\leq C_2 + \frac{1}{s+1}|< \omega_n, u_n >| + \frac{1}{s+1}| < \lambda\rho_n, u_n >| \\ &\leq C_2 + C_3\|u_n\|_{1,p} + \frac{\lambda}{s+1}|< \rho_n, u_n >|. \end{aligned}$$

Como $(\rho_n) \subset \partial\psi(u_n)$

$$< \rho_n, v > \leq \psi^0(u_n, v) \text{ para todo } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Assim, da desigualdade (5.5) com $v = u_n$ temos

$$\begin{aligned} < \rho_n, u_n > \leq \psi^0(u_n; u_n) &\leq \int_{u_n<0} f_-(u_n)u_n + \int_{u_n>0} f_+(u_n)u_n \\ &\leq \int_{u_n<0} (u_n^+)^q u_n + \int_{u_n>0} (u_n^+)^q u_n \\ &\leq \int_{u_n<0} (u_n^+)^q(u_n^+ - u_n^-) + \int_{u_n>0} (u_n^+)^q(u_n^+ - u_n^-) \\ &\leq \int_{u_n>0} |u_n|^{q+1} \leq \int_\Omega |u_n|^{q+1}. \end{aligned}$$

Das imersões de Sobolev

$$|<\rho_n, u_n>| \leq \int_\Omega |u_n|^{q+1} \leq C_4 \|u_n\|_{1,p}^{q+1}.$$

Dessa forma,

$$I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{s+1} < \omega_n + \lambda\rho_n, u_n > \leq C_2 + C_3\|u_n\|_{1,p} + C_5\|u_n\|_{1,p}^{q+1}. \tag{5.9}$$

Logo, de (5.8) e (5.9) , segue-se

$$\begin{aligned} C_2 + C_3\|u_n\|_{1,p} + C_5\|u_n\|_{1,p}^{q+1} &\geq \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u_n\|_{1,p}^p) - \frac{1}{s+1}[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p \\ &- \lambda \int_\Omega \int_0^{u_n} H(t-a)(t^+)^q dtdx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u_n\|_{1,p}^p) - \frac{1}{s+1}[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p &\leq C_2 + C_3\|u_n\|_{1,p} + C_5\|u_n\|_{1,p}^{q+1} \\ &+ \lambda \int_\Omega \int_0^{u_n} H(t-a)(t^+)^q dtdx \\ &\leq C_2 + C_3\|u_n\|_{1,p} + C_5\|u_n\|_{1,p}^{q+1} \\ &+ \lambda \int_\Omega \int_0^{u_n} (t^+)^q dtdx \end{aligned}$$

devido $H \leq 1$.

Usando as imersões de Sobolev, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u_n\|_{1,p}^p) - \frac{1}{s+1}[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p &\leq C_2 + C_3\|u_n\|_{1,p} + C_5\|u_n\|_{1,p}^{q+1} \\ &+ \lambda C_6\|u_n\|_{1,p}^{q+1}. \end{aligned}$$

Sendo

$$\frac{1}{p}\widehat{M}(\|u_n\|_{1,p}^p) = \frac{1}{p}\int_0^{\|u_n\|_{1,p}^p} [M(s)]^{p-1} ds,$$

segue-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}\int_0^{\|u_n\|_{1,p}^p} [M(s)]^{p-1} ds - \frac{1}{s+1}[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p &\leq C_2 + C_3\|u_n\|_{1,p} \\ &+ C_7\|u_n\|_{1,p}^{q+1}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Da continuidade de $M^{p-1}$ em $[0, \|u_n\|_{1,p}^p]$, pelo Teorema do Valor Médio para as Integrais, existe $0 < \xi_n < \|u_n\|_{1,p}^p$ tal que

$$\frac{1}{p}\int_0^{\|u_n\|_{1,p}^p} [M(s)]^{p-1} ds = [M(\xi_n)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p.$$

Desde que $M$ é não-crescente

$$[M(\xi_n)]^{p-1} \geq [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}. \tag{5.11}$$

De (5.10) e (5.11),

$$\frac{1}{p}[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p - \frac{1}{s+1}[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p \leq! C_2 + C_3\|u_n\|_{1,p} + C_7\|u_n\|_{1,p}^{q+1},$$

de onde segue

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s+1}\right)[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p \leq C_2 + C_3\|u_n\|_{1,p} + C_7\|u_n\|_{1,p}^{q+1},$$

implicando em

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s+1}\right)[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^{(p-1)-q} \leq \frac{C_2}{\|u_n\|_{1,p}^{q+1}} + \frac{C_3}{\|u_n\|_{1,p}^{q}} + C_7.$$

Por $(H_3)$, segue que $(u_n)$ é limitada logo, a menos de subseqüência, existe $(u_1) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\begin{array}{rcl} \|u_n\|_{1,p}^p & \to & \vartheta^p, \\ u_n & \rightharpoonup & u_1 \;\text{ em }\; W_0^{1,p}(\Omega), \\ u_n & \to & u_1 \;\text{ em }\; L^\alpha(\Omega), \;\; 1 \leq \alpha < p^*, \\ u_n(x) & \to & u_1(x) \;\; q.s. \;\text{ m }\; \Omega. \end{array}$$

De (5.7), $(\rho_n)$ é limitada em $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$ logo, existe $\rho_0 \in (W_0^{1,p}(\Omega))^*$ onde

$$\begin{array}{rcl} \rho_n & \rightharpoonup & \rho_0 \;\text{ em }\; (W_0^{1,p}(\Omega))^*, \\ \rho_n(x) & \to & \rho_0(x) \;\; q.s. \;\text{ em }\; \Omega. \end{array}$$

Pelo Lema 5.2 , desde que $\rho_n \in \partial\psi(u_n)$, temos

$$\rho_n(x) \in [f_-(u_n(x)), f_+(u_n(x))] \;\; q.s. \;\text{ em }\; \Omega.$$

Conseqüentemente,

$$\rho_0(x) \in [f_-(u_1(x)), f_+(u_1(x))] \;\; q.s. \;\text{ em }\; \Omega.$$

Note que podemos considerar $u_n \geq 0$. De fato, sendo $(u_n)$ limitada, a seqüência $(u_n^-)$ é também limitada.

Por (5.7),

$$< w_n, u_n^- >= \phi'(u_n)u_n - \lambda < \rho, u_n^- > -J'(u_n)u_n^-$$

e como

$$J'(u_n)u_n^- = \int_\Omega h(x)(u_n^+)^s u_n^- = 0$$

segue-se

$$< w_n, u_n^- >= \phi'(u_n)u_n - \lambda < \rho, u_n^- > .$$

De (5.5),

$$< \rho_n, u_n^- > \leq \psi^0(u_n; u_n^-) \leq \int_{u_n^- < 0} f_-(u_n(x))u_n^- + \int_{u_n^- > 0} f_+(u_n(x))u_n^-.$$

Como $u_n^- \geq 0$,

$$\int_{u_n^- < 0} f_-(u_n(x))u_n^- = 0$$

e desde que

$$\begin{aligned} f_+(u_n(x))u_n^- &= \lim_{\delta \to 0^+} f(u_x - \delta)u_n^- \\ &= \lim_{\delta \to 0^+} H(u_n(x) + \delta - a)(u_n^+)^q u_n^- = 0 \end{aligned}$$

tem-se

$$< \rho_n, u_n^- \leq 0,$$

sendo $\lambda > 0$

$$-\lambda < \rho_n, u_n^- > \geq 0.$$

Assim,

$$< w_n, u_n^- > \geq \phi'(u_n)u_n,$$

implicando em

$$|\phi'(u_n)u_n| \leq | < w_n, u_n^- > | \leq ||w_n||_* \|u_n^-\| \to 0$$

pois, $||w_n||_* \to 0$ e $(u_n^-)$ é limitada.

Dessa forma,

$$|\phi'(u_n)u_n| \to 0,$$

isto é,

$$|[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1} \|u_n^-\|_{1,p}^p| \to 0$$

e desde que $M(\|u_n\|_{1,p}^p) \geq K$ para $n$ suficientemente grande, segue-se

$$\|u_n^-\|_{1,p}^p \to 0,$$

o que implica em

$$\|u_n^-\|_{1,p} \to 0.$$

Portanto, podemos considerar

$$u_n = u_n^+ + o_n(1)$$

de onde segue que

$$\|u_n\|_{1,p}^p = \|u_n^+\|_{1,p}^p + o_n(1).$$

Da continuidade de $\widehat{M}$,

$$\widehat{M}(\|u_n\|_{1,p}^p) = \widehat{M}(\|u_n^+\|_{1,p}^p) + o_n.$$

Queremos mostrar que

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) &= I_{\lambda,a}(u_n^+) + o_n(1), \\ m(u_n) &= m(u_n^+) + o_n(1). \end{aligned}$$

De fato, como

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u_n\|_{1,p}^p) - \lambda\psi(u_n) - \frac{1}{p}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{s+1}, \\ I_{\lambda,a}(u_n^+) &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u_n^+\|_{1,p}^p) - \lambda\psi(u_n^+) - \frac{1}{p}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{s+1}, \end{aligned}$$

e desde que

$$H(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t \leq a, \\ 1 & \text{se} \quad t > a, \end{cases}$$

segue-se

$$\begin{aligned} \psi(u_n) &= \int_\Omega \int_0^{u_n} H(t-a)(t^+)^q dtdx \\ &= \int_\Omega \int_0^{a} H(t-a)(t^+)^q dtdx + \int_\Omega \int_a^{u_n} H(t-a)(t^+)^q dtdx \\ &= \int_\Omega \int_a^{u_n} (t^+)^q dtdx = \frac{1}{q+1}\int_\Omega [(u_n^+)^{q+1} - a^{q+1}] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \psi(u_n^+) &= \int_\Omega \int_0^{u_n^+} H(t-a)(t^+)^q dtdx \\ &= \int_\Omega \int_0^{a} H(t-a)(t^+)^q dtdx + \int_\Omega \int_a^{u_n^+} H(t-a)(t^+)^q dtdx \\ &= \int_\Omega \int_a^{u_n^+} (t^+)^q dtdx \\ &= \frac{1}{q+1}\int_\Omega [(u_n^+)^{q+1} - a^{q+1}]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$I_{\lambda,a}(u_n) \quad = \quad I_{\lambda,a}(u_n^+) + o_n(1). \tag{5.12}$$

Além disso, desde que

$$\begin{aligned} m(u_n) &= \|\omega_n\|_*;\ \omega_n \in \partial I_{\lambda,a}(u_n), \\ m(u_n^+) &= \|\omega_n\|_*;\ \omega_n \in \partial I_{\lambda,a}(u_n^+), \end{aligned}$$

tem-se, para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned} <\omega_n, v> &\leq I_{\lambda,a}^0(u_n; v) = \limsup_{h\to 0,\delta\to 0^+} \frac{I_{\lambda,a}(u_n + h + \delta v) - I_{\lambda,a}(u_n + h)}{\delta}, \\ <\omega_n, v> &\leq I_{\lambda,a}^0(u_n^+; v) = \limsup_{h\to 0,\delta\to 0^+} \frac{I_{\lambda,a}(u_n^+ + h + \delta v) - I_{\lambda,a}(u_n^+ + h)}{\delta} \end{aligned}$$

e por (5.12), $I_{\lambda,a}^0(u_n; v) = I_{\lambda,a}^0(u_n^+; v) + o(n)$, implicando em

$$m(u_n) = m(u_n^+) + o_n(1). \tag{5.13}$$

De (5.12) e (5.13) segue-se que $(u_n^+)$ é uma seqüência Palais-Smale e assim, qualquer seqüência Palais-Smale pode ser considerada uma seqüência não-negativa. Logo, $u_n \geq 0$ e conseqüentemente $u_1 \geq 0$.

Provaremos agora que

$$u_n \to u_1 \ \text{ em } \ W_0^{1,p}(\Omega).$$

Da continuidade de $M$ e de $\|u_n\|^p \to \vartheta^p$, segue-se

$$M(\|u_n\|_{1,p}^p) \to M(\vartheta^p)$$

e desde que $M(\vartheta^p) > 0$, existe $K > 0$ tal que

$$M(\|u_n\|_{1,p}^p) \geq K > 0 \text{ para } n \text{ suficientemente grande.}$$

Usando a desigualdade (4.10), temos

$$K^{p-1}C_p \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_1|^p \leq [M(\|u_n\|^p)]^{p-1} \int_\Omega < |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1, \nabla u_n - \nabla u_1 >,$$

assim,

$$\begin{aligned} K^{p-1}C_p \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_1|^p \leq [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p &- [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u_1 \\ &- [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \nabla u_n \\ &+ [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_1\|_{1,p}^p. \end{aligned}$$

Note que

$$[M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_1\|_{1,p}^p - [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \nabla u_n = o_n(1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} K^{p-1}C_p\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_1|^p &\leq [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p - [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u_1 \\ &+ \quad O_n(1). \end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{aligned} \int_\Omega h(x)u_n^{s+1} &\to \int_\Omega h(x)u_1^{s+1} \\ \int_\Omega h(x)u_n^s u_1 &\to \int_\Omega h(x)u_1^{s+1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |<\rho_n, u_1> - <\rho_n, u_n>| &= |<\rho_n, u_n> - <\rho_n, u_1>| \\ &= |<\rho_n, u_n - u_1>| \\ &\leq \|\rho_n\|_* |u_n - u_1|_p \to 0, \end{aligned}$$

pois, $(\rho_n)$ é limitada em $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$ e $u_n \to u_1$ em $L^\alpha(\Omega)$, $1 \leq \alpha < p^*$.

Assim,

$$\lambda(<\rho_n, u_1> - <\rho_n, u_n>) = o_n(1).$$

Logo,

$$\begin{aligned} K^{p-1}C_p\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_1|^p &\leq [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_n\|_{1,p}^p - [M(\|u_n\|_{1,p}^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u_1 \\ &- \int_\Omega h(x)u_n^{s+1} + \int_\Omega h(x)u_n^s u_1 - \lambda <\rho_n, u_n> + \lambda <\rho_n, u_1> \\ &+ \ o_n(1) \\ &= \ <\omega_n, u_n> - <\omega_n, u_1> \\ &= \ o_n(1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$u_n \to u_1 \ \text{ em } \ W_0^{1,p}(\Omega).$$

Assim, $I_{\lambda,a}$ satisfaz a condição $(P.S)_c$. ■

## 5.3 Prova do Teorema 5.2

**Demonstração :**

**Primeira Solução :**(**Teorema do Passo da Montanha**) Usando o Lemas 5.1 e 5.3 segue do Teorema do Passo da Montanha para funcionais $Lip_{loc}$ que $u_1$ é ponto crítico de $I_{\lambda,a}$ no nível $c$, isto é,

$$I_{\lambda,a}(u_1) = c > 0 \tag{5.14}$$

implicando que $u_1 \not\equiv 0$.

De (5.7),

$$\lambda\rho_n = \phi'(u_n) - J'(u_n) - \omega_n,$$

e assim, para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\lambda < \rho_n, \varphi >= \phi'(u_n)\varphi - J'(u_n)\varphi - < \omega_n, \varphi > . \tag{5.15}$$

Desde que $(\rho_n) \subset \partial\psi(u_n)$ então, $(\rho_n) \subset (L^p(\Omega))^* \subset (W_0^{1,p}(\Omega))^*$, pelo Teorema de Representação de Riesz

$$< \rho_n, v >= \int_\Omega \rho_n v \quad \text{para} \quad \text{toda} \quad v \in L^p(\Omega),$$

em particular,

$$< \rho_n, v >= \int_\Omega \rho_n v \quad \text{para} \quad \text{toda} \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Logo, (5.15) torna-se

$$\lambda \int_\Omega \rho_n \varphi = \phi'(u_n)\varphi - J'(u_n)\varphi - < \omega_n, \varphi > . \tag{5.16}$$

Note que, sendo $\rho_n$ limitada em $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$, segue que a mesma é limitada em $(L^p(\Omega))^*$ assim, a menos de subseqüência, existe $\rho_0 \in (L^p(\Omega))^*$ tal que

$$\rho_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} \rho_0 \quad \text{em} \quad (L^p(\Omega))^*,$$

ou seja,

$$< \rho_n, v > \to < \rho_0, v > \quad \text{para toda } v \in L^p(\Omega).$$

Usando novamente o Teorema de Representação de Riesz

$$\int_\Omega \rho_n v \to \int_\Omega \rho_0 v \quad \text{para toda } v \in L^p(\Omega),$$

em particular

$$\int_\Omega \rho_n v \to \int_\Omega \rho_0 v \quad \text{para toda } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Passando ao limite com $n \to \infty$ em (5.16), usando o fato que $u_n \to u_1$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e que $\|\omega_n\|_* \to 0$ segue-se

$$\int_\Omega \rho_0 \varphi = \phi'(u_1)\varphi - J'(u_1)\varphi \quad \text{para} \quad \text{toda} \quad \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

ou seja, para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$[M(\|u_1\|_{1,p}^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \nabla \varphi - \int_\Omega h(x) u_1^s = \int_\Omega \rho_0 \varphi, \tag{5.17}$$

de onde segue que

$$-[M(\|u_1\|_{1,p}^p)]^{p-1} \Delta_p u_1 = J_1(u_1) + J_2 \subset (W_0^{1,p}(\Omega))^*,$$

onde,

$$\begin{aligned} J_1(u_1) : W_0^{1,p}(\Omega) \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \varphi \quad &\longmapsto \quad J_1(u_1)(\varphi) = \int_\Omega h(x) u_1^s \varphi \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} J_2 : W_0^{1,p}(\Omega) \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \varphi \quad &\longmapsto \quad J_2(\varphi) = \int_\Omega \rho_0 \varphi. \end{aligned}$$

Note que $J_1(u_1), J_2 \in (L^p(\Omega))^* \subset (W_0^{1,p}(\Omega))^*$. Dessa forma pelo Teorema de Representação de Riez $J_1(u_1), J_2 \in L^p(\Omega)$ e assim,

$$-[M(\|u_1\|_{1,p}^p)]^{p-1} \Delta_p u_1 \in L^p(\Omega).$$

De (5.17),

$$-[M(\|u_1\|_{1,p}^p)]^{p-1} \Delta_p u_1(x) - h(x) u_1(x) = \lambda \rho_0(x) \quad q.s. \quad \text{em} \quad \Omega,$$

implicando em

$$-[M(\|u_1\|_{1,p}^p)]^{p-1} \Delta_p u_1(x) - h(x) u_1(x) \in \lambda [f_-(u_1(x)), f_+(u_2(x))] \quad q.s. \quad \text{em} \quad \Omega.$$

**Prova de i) :** Vamos mostrar que $|\Gamma_a(u_1)| = 0$, onde $\Gamma_a(u_1) = \{x \in \Omega; u_1(x) = a\}$.

Suponhamos, por contradição, que $|\Gamma_a(u_1)| > 0$. Do Teorema de Morrey-Stampacchia ([46])

$$-\Delta_p u_1(x) = 0 \quad q.s. \quad \text{em} \quad \Gamma.$$

Logo,

$$-[M(\|u_1\|_{1,p}^p)]^{p-1} \Delta_p u_1(x) = 0 \quad q.s. \quad \text{em} \quad \Gamma. \tag{5.18}$$

Como $u_1$ é ponto crítico, segue-se

$$-[M(\|u_1\|_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u_1(x) - \lambda h(x)u_1^s(x) \in \lambda[f_-(u_1(x)), f_+(u_1(x))] \;\; q.s. \;\text{ em }\; \Omega.$$

De (5.18), obtemos

$$-\lambda h(x)u_1^s(x) \in \lambda[f_-(u_1(x)), f_+(u_1(x))] \;\; q.s. \;\text{ em }\; \Omega.$$

Desde que

$$0 \leq H(u_1 - a)(u_1^+)^q \leq (u_1^+)^q,$$

segue da definição de $f_-(u_1(x)), f_+(u_1(x))$ e do fato que $u_1 \geq 0$

$$0 \leq f_-(u_1(x)) \leq f_+(u_1(x)) \leq (u_1)^q.$$

Assim,

$$-\lambda h(x)u_1^s(x) \in [0, \lambda a^q]$$

o que é um absurdo. Portanto $|\Gamma_a(u_1)| = 0$.

Dessa forma,

$$-[M(\|u_1\|_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u_1(x) - h(x)u_1(x) \in \lambda\widehat{f}(u_1(x)) \;\; q.s. \;\text{ em }\; \Omega.$$

Provando que $u_1$ é uma solução do problema (5.1)

**Segunda Solução :**(**Princípio Variacional de Ekeland**) Pelo Lema 5.1, obtemos

$$I_{\lambda,a}(u) \geq \eta > 0, \;\; \text{para} \;\; 0 < \|u\|_{1,p} = \rho$$

assim, $I_{\lambda,a}(u)$ é limitada inferiormente em $\overline{B}_\rho$ e portanto, existe $\inf\limits_{\overline{B}_\rho(0)} I_{\lambda,a}(u)$.

**Afirmação 5.1** *Existe $a^* > 0$ tal que para $a \in (0, a^*)$ tem-se* $\inf\limits_{B_\rho(0)} I_{\lambda,a}(u) < 0$.

De fato, definamos a função auxiliar

$$\varphi_\tau(x) = \begin{cases} \tau a & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 2\tau a(1 - |x|) & \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1, \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

onde $\tau > (q+2)^{1/q+1}$.

Observemos que $\varphi_\tau \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e além disso,

$$\|\varphi_\tau\|_{1,p}^p = \int_\Omega |\nabla\varphi_\tau|^p = \int_{\{|x|\leq 1\}} |\nabla\varphi_\tau|^p = (2\tau a)^p \int_{\{|x|\leq 1\}} |\nabla(|x|)|^p$$

.

Fazendo a mudança de variável

$$x = wr, w \in S^{N-1} \Rightarrow dx = r^{N-1}ds(w)dr,$$

temos $|x| = r$. Logo $\dfrac{\partial r}{\partial x_i} = \dfrac{x_1}{r}$ , implicando em $|\nabla r| = 1$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\tau\|_{1,p}^p &= (2\tau a)^p \int_{\{\frac{1}{2}\leq|x|\leq 1\}} |\nabla(|x|)|^p \\
&\leq (2\tau a)^p \int_{\{|x|\leq 1\}} |\nabla(|x|)|^p \\
&= (2\tau a)^p \int_0^1 \int_{S^{N-1}} |\nabla r|^p ds(w)dr \\
&= (2\tau a)^p \int_0^1 \int_{S^{N-1}} r^{N-1} ds(w)dr \\
&= (2\tau a)^p \omega_N ds \int_0^1 r^{N-1}dr \\
&= (2\tau a)^p \omega_N \frac{1}{N} \\
&= (2\tau a)^p \alpha_N.
\end{aligned}$$

onde $\omega_N$ é a área da esfera unitária e $\alpha_N$ é o volume da bola unitária.

Se $a < \dfrac{\sqrt[p]{\rho}}{2\tau\sqrt[p]{\alpha_N}} = a_1$, onde $\rho$ é dado pela geometria do Teorema do Passo da Montanha, temos $\varphi_\tau \in B_\rho$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \int_0^{\varphi_\tau} H(t-a)(t^+)^q dtdx &\geq \int_{\{|x|\leq\frac{1}{2}\}} \int_0^{\varphi_\tau} H(t-a)(t^+)^q dtdx \\
&= \int_{\{|x|\leq\frac{1}{2}\}} \int_0^{a} H(t-a)(t^+)^q dtdx \\
&+ \int_{\{|x|\leq\frac{1}{2}\}} \int_a^{\varphi_\tau} H(t-a)(t^+)^q dtdx \\
&= \int_{\{|x|\leq\frac{1}{2}\}} \int_a^{\varphi_\tau} (t^+)^q dtdx \\
&= \int_{\{|x|\leq\frac{1}{2}\}} \int_a^{\tau a} (t^+)^q dtdx \\
&= \frac{a^{q+1}(\tau^{q+1}-1)}{q+1} \int_{\{|x|\leq\frac{1}{2}\}} dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_\Omega \int_0^{\varphi_\tau} H(t-a)(t^+)^q dtdx \geq \frac{a^{q+1}(\tau^{q+1}-1)}{q+1} C_1.$$

Assim,

$$I_{\lambda,a}(\varphi_\tau) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|\varphi_\tau\|_{1,p}^p) - \lambda \int_\Omega \int_0^{\varphi_\tau} H(t-a)(t^+)^q dtdx - \frac{t^{s+1}}{s+1}\int_\Omega h(x)(\varphi_\tau^+)^{q+1}.$$

Desde que

$$\frac{t^{s+1}}{s+1}\int_{\Omega} h(x)(\varphi_{\tau}^{+})^{q+1} \geq 0,$$

segue-se

$$I_{\lambda,a}(\varphi_{\tau}) \leq \frac{1}{p}\widehat{M}(\|\varphi_{\tau}\|_{1,p}^{p}) - \frac{\lambda C_1 a^{q+1}(\tau^{q+1}-1)}{q+1}.$$

Sendo $M$ contínua em $[0, \|\varphi_{\tau}\|_{1,p}^{p}]$,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(\varphi_{\tau}) &\leq \frac{C_2}{p}\|\varphi_{\tau}\|_{1,p}^{p} - \frac{\lambda C_1 a^{q+1}(\tau^{q+1}-1)}{q+1} \\ &\leq \frac{C_2}{p}2^p a^p \tau^p \alpha_N - \frac{\lambda C_1 a^{q+1}(\tau^{q+1}-1)}{q+1} \\ &= a^{q+1}\left(\frac{C_2 2^p a^{p-(q+1)}\tau^p \alpha_N}{p} - \frac{\lambda C_1(\tau^{q+1}-1)}{q+1}\right). \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{C_2 2^p a^{p-(q+1)}\tau^p \alpha_N}{p} - \frac{\lambda C_1(\tau^{q+1}-1)}{q+1} \leq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{C_2 2^p a^{p-(q+1)}\tau^p \alpha_N}{p} \leq \frac{\lambda C_1(\tau^{q+1}-1)}{q+1} \\ &\Longleftrightarrow \quad a^{p-(q+1)} \leq \frac{\lambda C_1(\tau^{q+1}-1)p}{C_2 2^p (q+1)\alpha_N \tau^p}. \end{aligned}$$

Fazendo $a_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda C_1(\tau^{q+1}-1)p}{C_2 2^p(q+1)\alpha_N\tau^p}$ e tomando $a^* = a^*(\lambda) = \min\{a_1, a_2\}$ segue-se

$$\inf_{B_\rho} I_{\lambda,u} < 0, \quad \text{para} \quad a \in (0, a^*).$$

Demonstrando a afirmação.

Pelo Princípio Variacional de Ekeland, existe $u_\epsilon \in B_\rho$ tal que

$$I_{\lambda,a}(u_\epsilon) < \inf_{B_\rho(0)} I_{\lambda,a}(u) + \epsilon \tag{5.19}$$

e

$$I_{\lambda,a}(u_\epsilon) < I_{\lambda,a}(u) + \epsilon\|u - u_\epsilon\|_{1,p}, \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \text{com} \quad u \neq u_\epsilon. \tag{5.20}$$

Consideremos $\epsilon > 0$ de modo que

$$0 < \epsilon < \inf_{\partial B_\rho} I_{\lambda,a} - \inf_{B_\rho(0)} I_{\lambda,a} \tag{5.21}$$

assim, $u_\epsilon \in B_\rho$ pois, caso contrário, (se $u \in \partial B_\rho$) teríamos

$$\inf_{\partial B_\rho} I_{\lambda,a}(u) \leq I_{\lambda,a}(u_\epsilon)$$

e isso seria uma contradição com (5.21).

Seja $\gamma > 0$ suficientemente pequeno e $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|v\|_{1,p} < 1$ tal que

$$u_\gamma = u_\epsilon + \gamma v \in B_\rho.$$

De (5.20) temos,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_\epsilon) &< I_{\lambda,a}(u_\gamma) + \epsilon\|u_\gamma - u_\epsilon\|_{1,p} \\ &< I_{\lambda,a}(u_\epsilon + \gamma v) + \epsilon\gamma\|v\|_{1,p} \end{aligned}$$

implicando em

$$I_{\lambda,a}(u_\epsilon + \gamma v) - I_{\lambda,a}(u_\epsilon) + \epsilon\gamma\|v\|_{1,p} \geq 0.$$

Dessa forma,

$$-\epsilon\|v\|_{1,p} \leq \frac{I_{\lambda,a}(u_\epsilon + \gamma v) - I_{\lambda,a}(u_\epsilon)}{\gamma}.$$

Daí,

$$-\epsilon\|v\|_{1,p} \leq \limsup_{\gamma \to 0} \frac{I_{\lambda,a}(u_\epsilon + \gamma v) - I_{\lambda,a}(u_\epsilon)}{\gamma} \leq I^0_{\lambda,a}(u_\epsilon; v).$$

Sabendo que é válida a desigualdade

$$I^0_{\lambda,a}(u; v) = \max_{\mu \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} < \mu, v >, \text{ para todos } u, v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

obtemos

$$-\epsilon\|v\|_{1,p} \leq I^0_{\lambda,a}(u_\epsilon; v) = \max_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} < \omega, v > .$$

Trocando $v$ por $-v$,

$$-\epsilon\|v\|_{1,p} \leq \max_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} < \omega, -v >= -\min_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} < \omega, v > .$$

Logo,

$$\min_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} < \omega, v > \leq \epsilon\|v\|_{1,p}, \text{ para todo } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

De onde concluímos que

$$\sup_{\|v\|_{1,p} < 1} \min_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} < \omega, v > \leq \epsilon.$$

Pelo Teorema de Min-max de Ky-Fan, temos

$$\min_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \sup_{\|v\|_{1,p} < 1} < \omega, v > \leq \epsilon. \tag{5.22}$$

Assim, concluímos que (5.19) e (5.22) nos garantem a existência de $u_n \in B_\rho$, tal que

$$I_{\lambda,a}(u_n) \to \widetilde{c},$$

$$m(u_n) = \min_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_n)} \|\omega\|_* \to 0$$

ou seja $(u_n)$ é uma seqüência Palais-Smale no nível $\widetilde{c}$.

Do Lema 5.3, existe $u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ onde, a menos de subseqüência

$$u_n \to u_2 \quad \text{em} \quad W_0^{1,p}(\Omega)$$

e

$$I_{\lambda,a}(u_2) = \widetilde{c} = \inf_{B_\rho(0)} I_{\lambda,a} < 0 \tag{5.23}$$

Assim, $(u_2)$ é ponto de mínimo local e conseqüentemente é ponto crítico de $I_{\lambda,a}$, portanto seguindo as mesmas idéias feita para a demonstração da primeira solução, segue que $u_2$ é também uma solução do problema (5.1) e usando os mesmos argumentos explorados para que $u_1$ satisfizesse (i), temos também que $u_2$ satisfaz $(i)$.

**Prova de ii) :** De (5.14) e (5.23) segue que

$$I_{\lambda,a}(u_2) < 0 < I_{\lambda,a}(u_1).$$

**Prova de iii) :** Mostraremos agora que $|\{x \in \Omega; u_i(x) > a\}| > 0, \quad i = 1, 2.$

Iniciaremos com a solução $u_1$ proveniente do Teorema do Passo da Montanha.

Suponhamos, por contradição que

$$u_1(x) \leq a \quad q.s \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Assim,

$$\lambda \int_\Omega \int_0^{u_1} H(t-a)(t^+)q = 0.$$

Do fato acima e desde que $u_1$ é ponto crítico temos

$$[M(\|u_1\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_1\|_{1,p}^p = \int_\Omega h u_1^{s+1}.$$

Observe que

$$\int_\Omega h u_1^{s+1} \leq |h|_\infty \int_\Omega u_1^p u_1^{s+1-p}$$

e assim,

$$\begin{aligned}[M(\|u_1\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_1\|_{1,p}^p &\leq |h|_\infty \int_\Omega u_1^p u_1^{s+1-p} \\ &\leq C|h|_\infty a^{s+1-p}\|u_1\|_{1,p}^p\end{aligned}$$

implicando em

$$[M(\|u_1\|_{1,p}^p)]^{p-1} \leq C|h|_\infty a^{s+1-p}.$$

Note que existe $C > 0$ tal que $\|u_1\| \geq C$ pois, caso contrário, teríamos que $\|u_1\| \to 0$ quando $a \to 0$ implicando que o nível "c"do Passo da Montanha convergeria para zero, o que é um absurdo. Portanto, usando $(H_4)$, isto é, $M(t) > 0$ para todo $t \geq 0$, existe $\widetilde{C} > 0$ tal que

$$0 < \widetilde{C} \leq [M(\|u_1\|_{1,p}^p)]^{p-1} \leq C|h|_\infty a^{s+1-p}.$$

para todo $a > 0$, o que é uma contradição.

Consideremos, agora, a solução $u_2$ proveniente do Princípio Variacional de Ekeland.

Suponhamos, por contradição, que

$$u_2(x) \leq a \quad q.s \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Assim,

$$\lambda \int_\Omega \int_0^{u_1} H(t-a)(t^+)q = 0.$$

Do fato acima e desde que $u_2$ é ponto crítico temos

$$[M(\|u_2\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_2\|_{1,p}^p = \int_\Omega h u_2^{s+1}.$$

Vamos considerar dois casos:

- Se $0 < \|u_2\| \leq t_1$, temos de $(H_1)$

$$M(\|u_2\|) \geq m_1 > 0. \tag{5.24}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}[M(\|u_2\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_2\|_{1,p}^p &\leq |h|_\infty \int_\Omega u_2^p u_2^{s+1-p} \\ &\leq C|h|_\infty a^{s+1-p}\|u_2\|_{1,p}^p\end{aligned}$$

isto é,

$$[M(\|u_2\|_{1,p}^p)]^{p-1} \leq C|h|_\infty a^{s+1-p}.$$

Assim, $[M(\|u_2\|_{1,p}^p)] \to 0$ quando $a \to 0$ contradizendo (5.24).

- Se $\|u_2\|^p \geq t_1$, temos

$$\widehat{M}(\|u_2\|_{1,p}^p) \geq \widehat{M}(t_1) > 0,$$

pois $\widehat{M}$ é crescente.

Além disso,

$$0 \leq [M(\|u_2\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_2\|_{1,p}^p = \int_\Omega hu_2^{s+1} \leq |h|_\infty a^{s+1}.$$

Assim, $[M(\|u_2\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_2\|_{1,p}^p \to 0$ quando $a \to 0$.

Desde que,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_2) &= \widehat{M}(\|u_2\|_{1,p}^p) - \frac{1}{s+1}\int_\Omega hu_2^{s+1} \\ &\geq \widehat{M}(t_1) - [M(\|u_2\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_2\|_{1,p}^p, \end{aligned}$$

tem-se

$$0 < \widehat{M}(t_1) \leq I_{\lambda,a}(u_2) + [M(\|u_2\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_2\|_{1,p}^p.$$

Como $I_{\lambda,a}(u_2) < 0$, segue-se

$$0 < \widehat{M}(t_1) \leq [M(\|u_2\|_{1,p}^p)]^{p-1}\|u_2\|_{1,p}^p.$$

Logo, quando $a \to 0$ temos $\widehat{M}(t_1) = 0$ para $t_1 > 0$ o que é um absurdo.

Com isto concluímos a demonstração do Teorema 5.2. ∎

# Apêndice A

# Apêndice

## A.1 Alguns Resultados sobre o p-Laplaciano

Faremos uma exposição de alguns resultados envolvendo o operador p-Laplaciano, definido por

$$\Delta_p u \equiv div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \quad 1 < p < \infty.$$

Primeiramente, consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x) \text{ em } \ \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.1}$$

onde $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, $p' = \dfrac{p}{p-1}$, $p > 1$.

O resultado a seguir é uma simples conseqüência de minimização de funcionais apropriados.

**Teorema A.1** *Se $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, então o problema (A.1) possui somente uma solução $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ no sentido fraco, a saber*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi = \int_\Omega f\phi, \quad \textit{para} \quad \textit{toda} \quad \phi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{A.2}$$

Assim, temos definido o seguinte operador $(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$, o inverso de $-\Delta_p$, que satisfaz:

**(a)** $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ é uniformemente contínuo sobre conjuntos limitados, onde tal operador é definido como

$$\begin{aligned} -\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) &\to W^{-1,p'}(\Omega) \\ u &\mapsto -\Delta_p u \end{aligned}$$

onde

$$< -\Delta_p u, \phi >= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi, \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad \phi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Denotamos por $<,>$ o par de dualidade entre $W^{-1,p'}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$.

**(b)** Se $f \in C^0(\overline{\Omega})$, então a solução fraca de (A.1) pertence a $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $0 < \alpha < 1$, e a aplicação $(-\Delta_p)^{-1} : C^0(\overline{\Omega}) \to C^1(\overline{\Omega})$ é compacta.

**Teorema A.2** *(***Princípio de Comparação Fraco***) Seja $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_1 \leq -\Delta_p u_2 \ \textit{em} \ \ \Omega, \quad (\textit{no} \ \ \textit{sentido} \ \ \textit{fraco}) \\ \quad u_1 \leq u_2 \ \textit{em} \ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

*então $u_1 \leq u_2$ q.s. em $\Omega$.*

**Teorema A.3** *(***Um Princípio de Máximo de Hopf***) Se $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e verifica*

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geq 0 \ \textit{em} \ \ \Omega, \\ \quad u > 0 \ \textit{em} \ \ \Omega, \\ \quad u = 0 \ \textit{em} \ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

*então $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} < 0$ em $\partial\Omega$, onde $\eta$ é a normal exterior na $\partial\Omega$.*

**Teorema A.4** *(***Um Princípio de Máximo Forte***) Assuma que $k \in \mathbb{R}$ é um número não-negativo, $1 < p \leq 2$ e $\Omega$ é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$. Suponha que $u \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfaz*

$$-\Delta_p u + ku \geq 0 \quad \textit{em} \quad \Omega \quad (\textit{no} \ \ \textit{sentido} \ \ \textit{fraco}),$$

*$u \geq 0$ e $u \neq 0$ em $\Omega$. Então $u > 0$ em $\Omega$. A conclusão ainda é verdadeira para todo $p > 1$ quando $k = 0$.*

Agora, consideremos o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u \text{ em } \ \Omega, \\ \quad u = 0 \text{ em } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.3}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é um parâmetro. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de (A.3) se existe uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \neq 0$, satisfazendo (A.3) no sentido fraco. Tal função é chamada de autofunção de (A.3) associada ao autovalor $\lambda$.

Existe o primeiro autovalor positivo $\lambda_1$ do problema (A.3) o qual é caracterizado como o mínimo do quociente de Rayleigh:

$$\lambda_1 = \min_{0 \neq u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p}{\displaystyle\int_\Omega |u|^p} > 0.$$

Além disso, $\lambda_1$ é simples (i.e., todas as primeiras autofunções associadas $u$ são meramente múltiplos de cada uma), $\lambda_1$ é isolado (i.e., existe uma vizinhança de $\lambda_1$ , tal que $\lambda_1$ é o único nesta vizinhança). Existe uma autofunção positiva $\varphi_1$ em $\Omega$) $\varphi_1$ correspondente a $\lambda_1$.

Para mais informações sobre o p-Laplaciano o leitor pode consultar [47], [54] e [36].

## A.2 Prova da Afirmação 2.1

Recordamos a afirmação

$$[M^+(||u||_{1,p}^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m\nabla\varphi \longrightarrow [M^+(t_0)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi$$

para toda $\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Notemos primeiramente que $(-\Delta_p u_m)\subset (W_0^{1,p}(\Omega))'$ é uma seqüência limitada. De fato,

$$|<-\Delta_p u_m, v>| = \left|\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m\nabla v\right| \leq \int_\Omega |\nabla u_m|^{p-1}|\nabla v|$$

e devido $u_m\in\mathbb{V}_m\subset W_0^{1,p}(\Omega)$, temos que $|\nabla u_m|\in L^p(\Omega)$ e $|\nabla u_m|^{p-1}\in L^{p/p-1}(\Omega)$. Aplicando a desigualdade de Hölder com os expoentes $p$ e $p/p-1$, segue-se que

$$\begin{aligned} |<-\Delta_p u_m, v>| &\leq \left(\int_\Omega |\nabla u_m|^p\right)^{p-1/p}\left(\int_\Omega |\nabla v|^p\right)^{1/p} \\ &= ||u_m||_{1,p}^{p-1}||v||_{1,p} \end{aligned}$$

o que implica em

$$||-\Delta_p u_m||_{(W_0^{1,p}(\Omega))'} \leq ||u_m||_{1,p}^p \leq C_\epsilon$$

onde $C_\epsilon>0$ é uma constante, e a limitação de $(||u_m||_{1,p})$ foi provada no Lema 2.2.

Desde que $W_0^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach Separável e $(-\Delta_p u_m)$ é uma seqüência limitada em $(W_0^{1,p}(\Omega))'$ então, a menos de subseqüência,

$$-\Delta_p u_m \overset{*}{\rightharpoonup} \chi \;\text{ em }\; (W_0^{1,p}(\Omega))',$$

isto é

$$<-\Delta_p u_m,\psi>\to<\chi,\psi>,\;\text{ para toda }\;\psi\in W_0^{1,p}(\Omega),$$

o que é equivalente a

$$\int_\Omega |\nabla u_m^{p-2}|\nabla u_m\nabla\psi \to <\chi,\psi>,\;\text{ para toda }\;\psi\in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{A.4}$$

Desde que

$$[M^+(||u_m||_{1,p}^p)]^{p-1}\longrightarrow [M^+(t_0)]^{p-1}$$

segue de (A.4) que

$$[M^{+}(||u_m||_{1,p}^{p})]^{p-1}\int_{\Omega}|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m\nabla\psi \longrightarrow [M(t_0)]^{p-1} < \chi,\psi >, \tag{A.5}$$

para toda $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Passando ao limite em ambos os lados de (2.6) e usando as convergências previamente estabelecidas, temos que

$$[M^{+}(||u_m||_{1,p}^{p})]^{p-1}\int_{\Omega}|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m\nabla\varphi \longrightarrow \int_{\Omega}\frac{h(x)\psi}{(\epsilon+|u|)^{\gamma-p+2}} + \int_{\Omega}|u|^{\alpha-p+2}\psi. \tag{A.6}$$

Assim, de (A.5) e (A.6) e da unicidade do limite

$$[M(||u_m||_{1,p}^{p})]^{p-1} < \xi,\psi >= \int_{\Omega}\frac{h(x)\psi}{(\epsilon+|u|)^{\gamma-p+2}} + \int_{\Omega}|u|^{\alpha-p+2}\psi. \tag{A.7}$$

Usando a monotonicidade do operador $(-\Delta_p)$, isto é

$$< -\Delta_p w - (-\Delta v), w - v >\geq 0, \quad \text{para} \quad \text{todos} \quad w, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

temos que

$$[M^{+}(||w||_{1,p}^{p})]^{p-1}\int_{\Omega}(|\nabla w|^{p-2}\nabla w - |\nabla v|^{p-2}\nabla v, \nabla w - \nabla v) \geq 0.$$

Fazendo $w = u_m$ and $v = \psi$ na última expressão, obtemos

$$[M^{+}(||u_m||_{1,p}^{p})]^{p-1}\int_{\Omega}(|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m - |\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi, \nabla u_m - \nabla\psi) \geq 0$$

e assim,

$$[M^{+}(||u_m||_{1,p}^{p})]^{p-1}\left(\int_{\Omega}|\nabla u_m|^{p} - \int_{\Omega}|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m\nabla\psi - \int_{\Omega}|\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi\nabla u_m + \int_{\Omega}|\nabla\psi|^{p}\right) \geq 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} & [M^{+}(||u_m||_{1,p}^{p})]^{p-1}||u_m||_{1,p}^{p} - [M^{+}(||u_m||_{1,p}^{p})]^{p-1}\int_{\Omega}|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m\nabla\psi \\ - \quad & [M^{+}(||u_m||_{1,p}^{p})]^{p-1}\int_{\Omega}|\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi\nabla u_m + [M^{+}(||u_m||_{1,p}^{p})]^{p-1}\int_{\Omega}|\nabla\psi|^{p} \geq 0. \end{aligned}$$

Na expressão (2.6) fazendo $\varphi = u_m$, temos

$$[M^{+}(||u_m||_{1,p}^{p})]^{p-1}||u_m||_{1,p}^{p} = \int_{\Omega}\frac{h(x)u_m}{(\epsilon+|u_m|)^{\gamma-p+2}}u_m + \int_{\Omega}|u_m|^{\alpha-p+2}u_m.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega}\frac{h(x)u_m}{(\epsilon+|u_m|)^{\gamma-p+2}} + \int_{\Omega}|u_m|^{\alpha-p+2}u_m - [M^{+}(||u_m||_{1,p}^{p})]^{p-1}\int_{\Omega}|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m\nabla\psi \\ - \quad & [M^{+}(||u_m||_{1,p}^{p})]^{p-1}\int_{\Omega}|\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi\nabla u_m + [M^{+}(||u_m||_{1,p}^{p})]^{p-1}\int_{\Omega}|\nabla\psi|^{p} \geq 0 \end{aligned}$$

usando a definição do operador $-\Delta_p$ temos que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{h(x)u_m}{(\epsilon+|u_m|)^{\gamma-p+2}}+\int_\Omega |u_m|^{\alpha-p+2}u_m-[M^+(||u_m||^p_{1,p})]^{p-1}<-\Delta_p u_m,\psi>\\ -\quad&[M^+(||u_m||^p_{1,p})]^{p-1}<-\Delta_p\psi,u_m>+[M^+(||u_m||^p_{1,p})]^{p-1}<-\Delta_p\psi,\psi>\geq 0\end{aligned}$$

passando ao limite com $m\to\infty$ e usando (2.12) e (2.13)

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{h(x)u}{(\epsilon+|u|)^{\gamma-p+2}}+\int_\Omega |u|^{\alpha-p+2}u-[M^+(t_0)]^{p-1}<\chi,\psi>\\ -\quad&[M^+(t_0)]^{p-1}<-\Delta\psi,u>+[M^+(t_0)]^{p-1}<-\Delta_p\psi,\psi>\geq 0.\end{aligned}$$

Notando que

$$[M^+(t_0)]^{p-1}<\chi,\psi>=\int_\Omega \frac{h(x)\psi}{(\epsilon+|u|)^{\gamma-p+2}}+\int_\Omega |u|^{\alpha-p+2}\psi,\ \text{para toda } \psi\in\mathbb{V}_l\subset W_0^{1,p}(\Omega)$$

assim,

$$[M^+(t_0)]^{p-1}<\chi,u>=\int_\Omega \frac{h(x)u}{(\epsilon+|u|)^{\gamma-p+2}}+\int_\Omega |u|^{\alpha-p+2}u,$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned}&[M^+(t_0)]^{p-1}<\chi,u>-[M^+(t_0)]^{p-1}<\chi,\psi>\\ -\quad&[M^+(t_0)]^{p-1}<-\Delta_p\psi,u>+[M^+(t_0)]^{p-1}<-\Delta_p\psi,\psi>\geq 0,\end{aligned}$$

para toda $\psi\in\mathbb{V}_l$, isto é,

$$[M^+(t_0)]^{p-1}(<\chi,u>-<\chi,\psi>-<-\Delta_p\psi,u>+<-\Delta_p\psi,\psi>)\geq 0,$$

para toda $\psi\in\mathbb{V}_l$.

Assim,

$$[M^+(t_0)]^{p-1}<\chi-(-\Delta_p\psi),u-\psi>\geq 0.$$

Considere

$$\psi=u-\lambda\varphi,\quad \lambda>0\ \text{ e }\ \varphi\in\mathbb{V}_l$$

assim,

$$[M^+(t_0)]^{p-1}<\chi-(-\Delta_p(u-\lambda\varphi),\lambda\varphi)>\geq 0,\ \text{para todo } \lambda>0 \text{ e toda } \varphi\in\mathbb{V}_l.$$

Notando que $\lambda\varphi\in\mathbb{V}_l$,

$$[M^+(t_0)]^{p-1}<\chi-[-\Delta_p(u-\lambda\varphi),\varphi]>\geq 0,\ \text{para todo } \lambda>0 \text{ e toda } \varphi\in\mathbb{V}_l.$$

Passando ao limite de $\lambda\to 0$ em ambos os lados da expressão acima e usando a continuidade do operador $-\Delta_p$, temos

$$[M^+(t_0)]^{p-1}<\chi-(-\Delta_p(u),\varphi)>\geq 0,\quad \text{para toda }\ \varphi\in\mathbb{V}_l.$$

Desde que $[M^+(t_0)]^{p-1} > 0$, segue-se que

$$< \chi - (-\Delta_p u), \varphi > \geq 0, \quad \text{para} \quad \text{toda} \quad \varphi \in \mathbb{V}_l.$$

Assim,

$$< \chi - (-\Delta_p u), -\varphi > \geq 0$$

e obtemos

$$- < \chi - (-\Delta_p u), \varphi > \geq 0,$$

isto é,

$$< \chi - (-\Delta_p u), \varphi > \leq 0, \quad \text{para} \quad \text{toda} \quad \varphi \in \mathbb{V}_l.$$

Conseqüentemente,

$$< \chi - (-\Delta_p u), \varphi >= 0, \quad \text{para} \quad \text{toda} \quad \varphi \in \mathbb{V}_l.$$

Desde que $l$ é arbitrário

$$\chi = -\Delta_p u.$$

De $(A.6)$ e $(A.7)$ concluímos que

$$[M^+(||u_m||_{1,p}^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla \varphi \longrightarrow [M^+(t_0)]^{p-1} < -\Delta_p u, \psi >,$$

para toda $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Assim,

$$[M^+(||u_m||_{1,p}^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla \varphi \longrightarrow [M^+(t_0)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi,$$

para toda $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Isto conclui a prova da afirmação. ∎

# Bibliografia


[1] C.O. Alves & A.M. Bertone, *A discontinuous problem involving the p-Laplacian*, Electron. J. Differential Equations., 42(2003)1-10.

[2] C.O. Alves, A.M. Bertone & J.V. Gonçalves ,*A variational approach to discontinuous problems with critical Sobolev exponents*, J. Math. Anal. App., 265(2002)103-127.

[3] C.O. Alves & F.J.S.A. Corrêa , *On existence of solutions for a class of problem involving a nonlinear operator*, Comm. Appl. Nonlinear Anal., 8(2001)43-56.

[4] C.O. Alves & F.J.S.A. Corrêa , *On the existence of positive solutions for a class of singular systems involving quasilinear operators*, Appl. Math. Comp., 185(2007)727-736.

[5] C.O. Alves, F.J.S.A. Corrêa & T.F Ma, *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*, Comput. Math. Appl., 49 (2005)85-93.

[6] A. Ambrosetti & M. Calahorrano & F. Dobarro, *Global branching for discontinuous problems*, Comm. Math., 31 (1990)213-222.

[7] A. Ambrosetti & P. M. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal., 14 (1973)349-381.

[8] A. Ambrosetti & R. Turner, *Some discontinuous variational problems*, Differential Integral Equations., 1, N$^o$ 3(1988)341-349.

[9] D. Arcoya & M. Calahorrano, *Some discontinuous variational problems with a quasilinear operator,* J. Math. Anal.,187 (1994))1059-1072.

[10] D. Arcoya, J. I. Diaz & L. Tello, *S-Shaped birfurcation branch in a quasilinear multivalued model arising in climatology,* J. Differential Equations.,150 (1998)215-225.

[11] M. Badiale, *Critical exponent and discontinuous nonlinearities*, Differential Integral Equations, 6 (1993)1173-1185.

[12] M. Badiale, *Some remarks on elliptic problems with discontinuous nonlinearities*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 51 (1993)331-342.

[13] M. Badiale & F. Dobarro, *Some existence results for sublinear elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$, Funkcialaj Ekvacioj., 39(1996)183-202.

[14] M. Badiale & G. Tarantello, *Existence and multiplicity results for elliptic problems with critical growth and discontinuous nonlinearities*, Nonlinear Analysis, 29 (1997)639-677.

[15] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle-Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[16] H. Brezis & L. Oswald, *Remarks on sublinear elliptic equations*, Nonlinear Anal., Vol. 30, N$^o$ 1 (1986)55-64.

[17] H. Brezis & S. Kamim, *Sublinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$, Manuscripta Math., 74(1992)87-106.

[18] K. C. Chang, *Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations,* J. Math. Anal., 80 (1981)102-129.

[19] M. Chipot & B. Lovat, *Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems*, Nonlinear Anal., Vol. 30(1997)4619-4627.

[20] M. Chipot & J.F. Rodrigues, *On a class of nonlocal nonlinear problems*, RAIRO Modélisation Math. Anal. Numér., Vol. 26(1992)447-467.

[21] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley & Sons, N.Y, 1983.

[22] F.J.S.A. Corrêa, *On an elliptic equation involving a Kirchhoff term and a singular pertubation*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin, Bélgica, V. 14, n. 0(2007)15-24.

[23] F.J.S.A. Corrêa & G. M. Figueiredo, *On the existence of positive solution for an elliptic equation of Kirchhoff type via Moser iteration Method*, Bound. Value Probl.;v. 2006, n. 00, p. ID 79679-10, 2006.

[24] F.J.S.A. Corrêa & G. M. Figueiredo, *On an elliptic equation of p-Kirchhoff-type via variational methods*, Bull. Austral. Math. Soc., Vol. 74 (2006)263-277.

[25] F.J.S.A. Corrêa & J. V. Gonçalves, *Sublinear elliptic systems with discontinuous nonlinearities*, Appl. Anal., Vol. 44 (1990)37-50;

[26] D.G. Costa, *VIII Escola Latino-Americana de Matemática,*IMPA, Rio de Janeiro,1986.

[27] M.M Coclite & G. Palmieri, *On a singular nonlinear Dirichlet problem,* Comm. Partial Differential Equations, 14, n$^o$10(1989)1315-1327.

[28] M.G. Crandall, P.H Rabinowitz & L. Tartar *On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity,* Comm. Partial Differential Equations, 2, N$^o$ 2 (1977)193-222.

[29] J.I. Diaz, J.M. Morel & L. Oswald, *An elliptic equation with singular nonlinearity*, Comm. Partial Differential Equations, 12, N° 12 (1987)1333-1344.

[30] J.I. Diaz & J.E. Saa, *Existence et unicité of solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilinéaires*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.305, Série 1 (1987)521-524.

[31] A.L. Edelson, *Entire solutions of singular elliptic equations*,J. Math. Anal. Appl., 139, N° 2 (1989)523-532.

[32] I. Ekeland, *On the variational principle,*J. Math. Anal.Appl.,47 (1974)324-353.

[33] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate studies in Mathematics,1949.

[34] D.G. de Figueiredo, *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, Lectures Notes in Mathematics, 957, Springer-Verlag, (1982)34-37.

[35] M. do Rosário Grossinho & S. A. Tersian, *An Introduction to Minimax Theorems and Their Applications to Differential Equations*,2001

[36] Z. Guo, *Some existence and multiplicity results for a class of quasilinear elliptic eigenvalue problems*, Nonlinear Anal., Vol. 18, N°10 (1992)957-971.

[37] O. Kavian, *Inegalité de Hardy-Sobolev et applications*, Thése de Doctorate de 3eme cycle, Université de Paris VI (1978).

[38] G. Kirchhoff, *Mechanik, Teubner, Leipzig,* 1883.

[39] T. Kusano & C.A. Swanson, *Entire positive solutions of singular semilinear elliptic equations*, Japan. J. Math. (N.S)11, N° 1 (1985)145-155.

[40] A.V. Lair & A.W. Shaker, *Classical and weak solutions of a singular semilinear elliptic problem*, J. Math. Anal. Appl., 211, N° 2(1997)371-385.

[41] A.C. Lazer & P. J. McKenna, *On a singular nonlinear elliptic boundary value problem*, Proc. Amer. Math. Soc., 11, N° 3(1991)721-730.

[42] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution de próblemes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, (1969).

[43] J.L. Lions, *On some questions in boundary value problems of mathematical physics*, International Symposium on Continuum, Mechanics and Partial Differential Equations, Rio de Janeiro (1977), Mathematics Studies., Vol. 30, North-Holland, Amsterdam, (1978)284-346.

[44] T. F. Ma, *Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type*, Nonlinear Anal., Vol. 63 (2005)1967-1977.

[45] T. F. Ma & J. E. Muñoz Rivera, *Positive solutions for a nonlinear nonlocal elliptic transmission problem*, Appl. Math. Lett., 16 (2)(2003)243-248.

[46] C. B. Morrey, *Multiple integrals in calculus of variations*, Springer Verlag, Berlim, 1966.

[47] I. Peral, *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian,* Second School of Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations, ICTP-Trieste, 1997.

[48] K. Perera & E. A. B. Silva, *Existence and multiplicity of positive solutions for singular quasilinear problems*, J. Math. Anal. Appl., 323. N$^o$ 2(2006)1238-1252.

[49] K. Perera & Z. Zhang, *Nontrivial solutions of Kirchhoff-type problems via the Yang index,* J. Differential Equations., 221, N$^o$1(2006)246-255.

[50] K. Perera & Z. Zhang, *Multiple positive solutions of singular p-Laplacian problems by variational methods*,Bound. Value Probl.; N$^o$3(2005)377-382.

[51] A.W. Shaker, *On singular semilinear elliptic equations*, J. Math. Anal. Appl., 173, N$^o$ 1(1993)222-228.

[52] J. Shi & M. Yao, *On a singular nonlinear semilinear elliptic problem*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 128, n$^o$6(1998)1389-1401.

[53] Y. Sun, S. Wu & Y. Long, *Combined effects of ssingular and superlinear nonlinearities in some singular boundary value problems*, J. Differential Equations, 176, N$^o$ 2(2001)511-531.

[54] P. Tolksdorf, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Differential Equations., 51, (1984)126-150.

[55] M. Wiegner, *A degenerate diffusion equation with a nonlinear source term*, Nonlinear Anal., 28, N$^o$ 12(1997)1977-1995.

[56] Z. Zhang, *Critical points and positive solutions of singular elliptic boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl., 302, N$^o$ 2(2005)476-483.